ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА ИМЕНИ АДМИРАЛА С. О. МАКАРОВА

УДК 621.396

А. В. Саушев,
канд. техн. наук, профессор,
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

OPTIMIZATION OF PARAMETERS OF COMPLICATED ELECTROTECHNICAL SYSTEMS

Рассматриваются алгоритмы определения оптимальных значений и допустимых пределов изменения внутренних параметров сложных многопараметрических электротехнических систем, основанные на аналитическом описании области работоспособности системы при помощи логических R-функций. Для цели аппроксимации гиперповерхностей, составляющих область работоспособности, используются гиперсферы. Алгоритмы характеризуются высокой достоверностью полученных результатов.

Algorithms of determination of optimum values and admissible limits of change of internal parameters of complicated multiple parameter electrotechnical systems, the areas of working capacity of system based on the analytical description by means of logical R-functions are considered. For the purpose of approximation of the hypersurfaces making area of working capacity, hyperspheres are used. Algorithms are characterized by high reliability of the results received.

Ключевые слова: оптимизация параметров, сложная электротехническая система, область работоспособности, гиперсферы, R-функции.

Key words: optimization of the parameters, complicated electrotechnical system, area of working capacity, hypersphere, R-function.

Постановка задачи

Состояние электротехнической системы (ЭТС) в любой фиксированный момент времени характеризуется некоторым набором или вектором параметров, среди которых можно выделить:

— *входные параметры* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_k, ..., u_в)$, характеризующие задающие воздействия $u(t)$ и наблюдаемые на входах системы;

— *параметры внешних условий* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_\rho, ..., v_f)$, характеризующие возмущающие воздействия на систему;

— *внутренние параметры* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n)$, характеризующие состояние элементов ЭТС и называемые также *первичными параметрами*. К ним относятся величины сопротивлений, индуктивностей, емкостей, масс, моментов инерции, жесткостей упругих связей, коэффициенты усиления, постоянные времени, геометрические размеры элементов;

— *внутренние параметры* $\mathbf{Z}^\upsilon = (Z_1^\upsilon, Z_2^\upsilon, ..., Z_g^\upsilon, ..., Z_c^\upsilon)$, характеризующие фазовые переменные на выходах устройств, входящих как элементы $\upsilon = \overline{1, h}$, h — число элементов в составе ЭТС;

— *выходные параметры* $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_j, ..., Y_m)$, характеризующие различные функциональные зависимости фазовых переменных на выходах системы от времени или частоты. Эти параметры характеризуют свойства ЭТС, интересующие потребителя. Они представляют собой параметры-функционалы и параметры, являющиеся граничными значениями диапазонов внешних переменных, в которых сохраняется работоспособность ЭТС.

Проектирование ЭТС на этапе параметрического синтеза сводится к решению двух основных задач — определению номинальных значений первичных параметров системы и допустимых пределов их изменения. При проектировании эти параметры определяют вектор **X** управляемых (варьируемых) параметров.

К выходным параметрам на стадии параметрического синтеза относятся показатели назначения, параметрической надежности и экономичности [1]. Показателем параметрической надежности при ограниченных статистических данных о законах распределения внутренних параметров ЭТС во времени может являться запас работоспособности [1–4].

В общем случае следует выделять внешние и внутренние условия работоспособности, которые устанавливаются при проектировании ЭТС [5].

Под внешними условиями работоспособности будем понимать условия, выполнение которых необходимо для того, чтобы ЭТС функционировала с требуемыми показателями качества. Эти условия определяются заданными соотношениями между выходными параметрами ЭТС и техническими требованиями к этим параметрам.

Под внутренними условиями работоспособности будем понимать условия, при которых элементы ЭТС способны выполнять возложенные на них функции, сохраняя при этом работоспособное состояние. Эти условия определяются заданными соотношениями между внутренними параметрами $\mathbf{Z}^v$ и их допустимыми значениями, а также между первичными параметрами $\mathbf{X}$ и их предельными значениями.

Условия работоспособности могут быть односторонними и двухсторонними, и для второго (более общего) случая имеют вид:

$$\begin{aligned} &Y_{j\min} \le Y_j = F_j(\mathbf{X}) \le Y_{j\max},\ \mathrm{j} = \overline{1,m};\\ &Z^v_{j\min} \le Z^v_j = F^v_j(\mathbf{X}) \le Z^v_{j\max},\ v = \overline{1,h};\\ &X_{i\min} \le X_i \le X_{i\max},\ i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $Y_{j\max}$ ($Z^v_{j\max}$), $Y_{j\min}$ ($Z^v_{j\min}$), $Y_j(Z^v_j)$ — соответственно максимально и минимально допустимое значения j-го выходного Y_j (внутреннего Z^v_j) параметра; $F(\mathbf{X})$ — оператор связи первичных параметров с внутренними $\mathbf{Z}^v$ и выходными $\mathbf{Y}$ параметрами; $X_{i\min}$ и $X_{i\max}$ — предельно допустимые значения первичных параметров.

Первое неравенство в системе неравенств (1) является внешним условием работоспособности и определяет допусковую область $D_Y = \bigcap_{j=1}^{m} D_j$ пространства выходных параметров, которая имеет вид m-мерного гиперпараллелепипеда (бруса) евклидова пространства R^m [6]. Каждой области D_j значений выходных параметров соответствует область M_j значений первичных параметров. Это соответствие может быть записано в виде отображения $\Phi_{YX} : D_Y \to M_Y$ множества $D_Y = \bigcap_{j=1}^{m} D_j$ в множество $M_Y = \bigcap_{j=1}^{m} M_j$. При этом каждое неравенство $\left(F_j(\mathbf{X}) - Y_{j\min}\right) \cdot \left(Y_{j\max} - F_j(\mathbf{X})\right) \ge 0,\ j = \overline{1,m}$ в n-мерном евклидовом пространстве R^n первичных параметров определяет область M_j.

Второе неравенство в системе неравенств (1) является внутренним условием работоспособности и определяет допусковые области $D^v_Z = \bigcap_{j=1}^{m} D_j$, $v = \overline{1,h}$ пространства внутренних параметров Z^v, которые по виду соответствуют области D_Y. Каждой области D^v_Z согласно отображению $\Phi_{ZX} :\ D^v_Z \to M^v_Z$ в пространстве R^n соответствует область M^v_Z. Объединение областей M^v_Z определяет допусковую область $M_Z = \bigcap_{v=1}^{h} M^v_Z$, $v = \overline{1,h}$.

Третье неравенство в системе неравенств (1) также является внутренним условием работоспособности и определяет допусковую область D_X, которая, как и области D_Y и D^v_Z, имеет форму бруса: $D_X = \left\{X \in R^n | X_{i\min} \le X_i \le X_{i\max},\ i = \overline{1,n}\right\}$.

Область $G = D_X \cap M_Z \cap M_Y$, которая является пересечением областей D_X, M_Z и M_Y, называют *областью работоспособности*. Эта область определяет множество допустимых значений первичных параметров, при которых выполняются все требования, предъявляемые к выходным и внутренним параметрам системы. Форма области работоспособности может иметь весьма сложную конфигурацию [6; 9].

Для решения задачи назначения допусков на значения первичных параметров большинство известных методов с целью упрощения реальную область допустимых изменений параметров (область работоспособности) заменяют некоторым ортогональным гиперпараллелепипедом (брусом) *S*, оптимальным в том или ином смысле [2]. Допустимые пределы изменения устанавливаются при этом независимо на каждый первичный параметр. Однако такая замена приводит к большой методической погрешности, которая нелинейно возрастает с ростом числа первичных параметров. Кроме того, для неодносвязных областей работоспособности известные методы не всегда имеют однозначное решение [1; 7]. Для повышения точности аппроксимации области работоспособности используют также эллипсоидальную функцию [8]. Однако и в этом случае методическая погрешность аппроксимации для многопараметрических систем остается недопустимо большой [7]. Таким образом, актуальной является задача разработки более точных методов аппроксимации области работоспособности и назначения допусков на параметры элементов ЭТС. В работах [7; 9; 10] рассмотрен общий подход к решению этой задачи. Известные алгоритмы, как правило, основаны на линейной аппроксимации выпуклых областей работоспособности. Они требуют больших затрат времени на вычисления и малопригодны для ЭТС, состоящих из большого числа первичных параметров.

Для параметрической оптимизации ЭТС, характеризующихся параметрической нестабильностью, в качестве целевой функции предлагается выбрать минимальный запас работоспособности, который необходимо максимизировать. В случае оптимизации по одному из показателей назначения, например по времени переходного процесса или по интегральному показателю качества, запас работоспособности следует учитывать как ограничение, обеспечивая при синтезе его требуемое предельное значение. Методологическое и математическое обоснование выбора предлагаемой целевой функции приводится в работах [1; 11]. В работах [12–14] изложен метод параметрического синтеза ЭТС по критерию запаса работоспособности.

Для сложных ЭТС, характеризующихся большим числом первичных параметров, с целью сокращения временны́х затрат для рассмотренных выше задач, требуется разработка специальных, быстродействующих алгоритмов.

В статье рассматриваются алгоритм назначения допусков на первичные параметры многопараметрических ЭТС, характеризующийся низкой методической погрешностью, а также алгоритм параметрического синтеза по критерию запаса работоспособности.

Алгоритм назначения допусков на первичные параметры ЭТС

Будем предполагать, что в результате использования известных методов [7] получено множество граничных точек области работоспособности. На основе данной информации требуется получить аналитическое описание области работоспособности, которое будет определять допустимые пределы изменения первичных параметров ЭТС.

Учитывая, что область работоспособности представляет собой пересечение конечного числа гиперповерхностей f_g, $g = 1, 2, \ldots, d$; $d = 2(m + h + n)$, определяемых неравенствами (1) и представленных в одном из следующих видов $F_j(X) - Y_{j\min} \geq 0$, $Y_{j\max} - F_j(X) \geq 0$, $F_j^v(X) - Z_{j\min}^v \geq 0$, $Z_{j\max}^v - F_j^v(X) \geq 0$, $X_i - X_{i\min} \geq 0$, $X_{i\max} - X_i \geq 0$, можно записать

$$G = f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_g \wedge \ldots \wedge f_d.$$

Для существенного повышения достоверности математического описания областей работоспособности предлагается аппроксимировать каждую из гиперповерхностей f_g в отдельности. В том случае, если функции f_g принадлежат к классу *R*-функций, можно воспользоваться их свойствами и перейти от логической к аналитической форме записи [5–7].

Пусть $Y = F(\mathbf{X})$ есть функция, определенная всюду в пространстве R^n. Данная функция является *R*-функцией, если в каждой из областей H_j ($j = 1, 2, \ldots, 2^n$) она сохраняет постоянный знак, то есть $Q\left[F(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right] = \varphi = \text{const}$. При этом область H_j представляет собой совокупность всех точек пространства R^n, для которых хотя бы одна координата X_i равняется нулю.

Для построения *R*-конъюнкции удобно использовать следующую формулу [6; 9; 15]:

$$f_g \wedge_\alpha^k f_{g+1} = 0,5\left(f_g + f_{g+1} - \sqrt{f_g^2 + f_{g+1}^2 - 2\alpha f_g f_{g+1}}\right) R\left(f_g, f_{g+1}\right),$$

где $R(f_g, f_{g+1})$ — функция, обеспечивающая наличие *k* производных *R*-конъюнкции, $\alpha \in [-1; 1]$ — параметр преобразования, $f_g = f_g(\mathbf{X})$ — уравнение *g*-й гиперповерхности области *G*.

В том случае если не требуется, чтобы *R*-конъюнкция была дифференцируема, эта формула может быть упрощена. Принимая коэффициент $\alpha = 1$, получим

$$f_g \wedge f_{g+1} = 0,5\left(f_g + f_{g+1} - \left|f_g - f_{g+1}\right|\right).$$

Последовательно используя рассмотренное выше преобразование, можно получить аналитическое выражение, аппроксимирующее область работоспособности, которое с высокой достоверностью будет определять допустимые пределы изменения первичных параметров ЭТС. Например, для случая, когда $m = n = 2$, $h = 0$, область работоспособности задается уравнением

$$G = 0,5\left(M_Y + D_X - \left|M_Y - D_X\right|\right),$$

$$M_Y = 0,5\left(c + d - |c - d|\right), \quad D_X = 0,5\left(e + f - |e - f|\right),$$

$$c = Y_{1\max} - Y_{1\min} - \left|2F_1\left(X_1, X_2\right) - Y_{1\max} - Y_{1\min}\right|; \; d = Y_{2\max} - Y_{2\min} - \left|2F_2\left(X_1, X_2\right) - Y_{2\max} - Y_{2\min}\right|;$$

$$e = X_{1\max} - X_{1\min} - \left|2X_1 - X_{1\max} - X_{1\min}\right|; \; f = X_{2\max} - X_{2\min} - \left|2X_2 - X_{2\max} - X_{2\min}\right|.$$

Рассмотрим вопрос получения математического описания для гиперповерхностей f_g.

Для сложных ЭТС, характеризующихся высокой размерностью пространства первичных параметров, аппроксимировать гиперповерхности f_g, заданные множеством граничных точек, предлагается регулярными кривыми, зависящими от небольшого фиксированного числа параметров. Наиболее точную аппроксимацию позволяют получить гиперэллипсоиды. Однако, как показал анализ тестовых примеров, для аппроксимации достаточно использовать частный случай эллипсоидов — сферическую функцию. Предлагаемый подход позволяет, с одной стороны, существенно упростить аналитическое описание области работоспособности, а с другой стороны, гарантировать низкую методическую погрешность такой аппроксимации.

Запишем уравнение сферы в декартовых прямоугольных координатах в пространстве R^n первичных параметров системы:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_i^0)^2 = r^2,$$

где X_i^0, $i = \overline{1,n}$ — координаты, определяющие центр гиперсферы; *r* — параметр, определяющий ее радиус. Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a_0 = 0, \tag{2}$$

где $a_i = -2X_i^0$, $a_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^0\right)^2 - r^2$.

Получим расчетные формулы для определения неизвестных коэффициентов в уравнении (2), воспользовавшись для этой цели методом наименьших квадратов:

$$\sum = \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2(R_k) + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(R_k) + a_0\right]^2 = \min_a ,$$

где R_k, $k=\overline{1,N}$ — массив граничных точек для аппроксимируемой гиперповерхности f_g.

Для минимизации суммы квадратов отклонений приравняем к нулю частные производные по коэффициентам a_i, $i=\overline{0,n}$. Для упрощения записи вместо $X_i(R_k)$ будем писать X_{ki}:

$$\frac{\partial\sum}{\partial a_i} = 2\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_{ki} + a_0\right]\cdot X_{ki} = 0,\quad i=\overline{0,n}.$$

После преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений, решая которую можно получить искомые коэффициенты a_0, a_1, …, a_n:

$$\begin{cases} a_0 N + \ldots + a_i \sum_{k=1}^{N} X_{ki} + \ldots + a_n \sum_{r=1}^{N} X_{rn} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 = 0 \\ \ldots \\ a_0 \sum_{k=1}^{N} X_{ki} + \ldots + a_i \sum_{k=1}^{N} X_{ki}^2 + \ldots + a_n \sum_{k=1}^{N} X_{ki} X_{kn} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^3 = 0 \\ \ldots \\ a_0 \sum_{k=1}^{N} X_{kn} + \ldots + a_i \sum_{k=1}^{N} X_{ki} X_{kn} + \ldots + a_n \sum_{k=1}^{N} X_{kn}^2 + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 X_{kn} = 0 \end{cases} . \qquad (3)$$

Представим полученную систему уравнений в матричной форме записи:

$$(\mathbf{F}^T\mathbf{F})\,\mathbf{A} = \mathbf{Q},$$

где **F** — матрица базисных функций по всему множеству заданных граничных точек R_k; **A** — матрица искомых неизвестных коэффициентов; $\mathbf{F}^T$ — транспонированная матрица **F**; **Q** — матрица постоянных коэффициентов. При этом

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{i1} & \cdots & X_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & X_{1k} & \cdots & X_{ik} & \cdots & X_{nk} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & X_{1N} & \cdots & X_{iN} & \cdots & X_{nN} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \cdot 1 \\ \ldots \\ -\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \cdot X_{ki} \\ \ldots \\ -\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \cdot X_{kn} \end{bmatrix}.$$

Матрица произведения $\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{\Phi}$ определяет матрицу известных коэффициентов в системе уравнений (3) при неизвестных коэффициентах a_0, a_1, …, a_n.

Решение системы уравнений в матричной форме записи имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{Q} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1}\mathbf{Q}. \qquad (4)$$

Это решение может быть без труда получено с помощью специальных встроенных функций в различных системах программирования. При этом, достаточно часто, для удобства программирования в системе уравнений (3) первое уравнение следует записывать последним и счет начинать не с нуля, а с единицы.

После определения координат центра гиперсферы и ее радиуса необходимо вычислить методическую погрешность аппроксимации, которая рассчитывается по следующей формуле:

$$\mu = 1 - \frac{1}{rN}\left(\sum_{k=1}^{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ki} - X_i^0\right)^2}\right).$$

Вычисленное значение μ должно быть меньше допустимого значения $\mu_{\text{доп}}$, определяемого заданной погрешностью аппроксимации. Для большинства ЭТС $\mu_{\text{доп}} \in [0{,}05;\, 0{,}1]$ при задании значений первичных параметров в относительных единицах.

В том случае, если множество граничных точек неизвестно, уравнение, описывающее гиперповерхность f_g, можно получить на основе использования методов планирования эксперимента [16].

Алгоритм параметрической оптимизации системы по критерию запаса работоспособности

Задание области работоспособности в виде единого аналитического выражения, а также использование для описания этой области поверхностей гиперсфер позволяют получить выражение для целевой функции при оптимизации ЭТС по критерию максимизации запаса работоспособности.

В пространстве R^n первичных параметров введем метрику l, которая является функцией координат двух любых точек этого пространства, например точек A и B. При этом $l = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(X_i(A) - X_i(B)\right)^2}$, где $X_i(A)$, $X_i(B)$ — координаты векторов точек A и B соответственно; μ_i — нормирующий множитель по i-й координате параметров $\mathbf{X}$. Если одна из точек, например точка A, является граничной точкой области работоспособности, а точка B находится внутри этой области и ее координаты характеризуют состояние ЭТС в рассматриваемый момент времени, то данная метрика будет определять запас работоспособности системы и служить критерием определения координат оптимальной точки.

Перепишем выражение в формуле (2) в следующем виде:

$$f_0(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}X_i^0X_i + \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^0\right)^2 - r^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - X_i^0\right)^2 - r^2.$$

Выразим координату X_i через радиус гиперсферы r и метрику l, характеризующую запас работоспособности ЭТС. При этом

$$X_i = X_i^0 + r - l.$$

Подставляя значение X_i в выражение для функции $f_0(\mathbf{X})$, получим

$$f_0(\mathbf{X}) = (r - l)^2 - r^2.$$

Откуда

$$l = r - \sqrt{r^2 + f_0(\mathbf{X})}.$$

Из определения R-функции следует, что полученное выражение для l относится к их классу. Воспользуемся свойствами R-функций:

$$\lambda = 0{,}5\left(L + D_X - \left|L - D_X\right|\right),$$

где L — свертка R-конъюнкций l, определяющих расстояние от внутренней точки области работоспособности до соответствующей гиперповерхности f_g.

Для дальнейшего изложения сущности предлагаемого алгоритма сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема. При любом числе R-функций $f_j(\mathbf{X})$, $j=\overline{1,m}$, значение R-функции G, аналитически описывающей границу области работоспособности в виде конъюнкции этих функций, для любой внутренней точки области определяется значением функции $f_\rho(\mathbf{X})$, которое является наименьшим среди всех других R-функций $f_j(\mathbf{X})$:

$$\forall R(\mathbf{X})\in G,\, f_{1,m}(\mathbf{X})=G=f_\rho\left[R(\mathbf{X})\right],$$

где $f_\rho\left[\mathrm{R}(\mathbf{X})\right]=\inf f_j\left[R(\mathbf{X})\right],\, j=1,\,\ldots,\,\rho,\,\ldots,\,m.$

Доказательство. Выберем произвольно две R-функции $f_j(\mathbf{X})$ и $f_{j+1}(\mathbf{X})$ из их общего числа m, составляющих описание области работоспособности. Получим для этих функций R-конъюнкцию $f_{j,\,j+1}(\mathbf{X})$ следующего вида:

$$f_{j,j+1}(\mathbf{X})=0{,}5\Big(f_j(\mathbf{X})+f_{j+1}(\mathbf{X})-\Big|f_j(\mathbf{X})-f_{j+1}(\mathbf{X})\Big|\Big).$$

Пусть для некоторой произвольно выбранной точки $R(\mathbf{X})\in G$ выполняется неравенство $f_j(\mathbf{X})\le f_{j+1}(\mathbf{X})$. При этом, раскрывая знак модуля, получим, что $f_{j,\,j+1}(\mathbf{X})=f_j$. В противном случае если $f_j(\mathbf{X})>f_{j+1}(\mathbf{X})$, то $f_{j,\,j+1}(\mathbf{X})=f_{j+1}$.

Исходя из правила объединения R-функций в R-конъюнкции, можно заключить, что после выполнения m операций свертки значение функции G будет тождественно равно такому значению R-функции $f_\rho(\mathbf{X})$, которое принимает наименьшее значение из всех R-функций $f_j(\mathbf{X})$, $j=\overline{1,m}$, составляющих границу области работоспособности. Поскольку функции $f_j(\mathbf{X})$ и $f_{j+1}(\mathbf{X})$ были выбраны произвольно, то можно заключить, что данное правило справедливо и для любых других R-функций. *Теорема доказана*.

Таким образом, функция L по аналогии с функцией G может быть использована в качестве целевой функции при параметрическом синтезе ЭТС по критерию запаса работоспособности.

Если область работоспособности является односвязной областью, для оптимизации может быть использован любой метод одномерного поиска, включая разработанный автором модифицированный алгоритм симплексного поиска [7]. В общем случае, когда область работоспособности является не односвязной, возможно использование метода статистических испытаний с генерацией точек на основе псевдослучайной последовательности ЛПτ-поиска [17].

В том случае, если при параметрическом синтезе запас работоспособности является лишь ограничением, а оптимизация ведется по другому критерию, вначале определяется допусковая область G_l, в пределах которой запас работоспособности ЭТС больше или равен заданному значению l. Уравнение, описывающее область G_l, будет иметь следующий вид:

$$G_l=0{,}5\left(M_l+D_X-\left|M_l-D_X\right|\right);$$

$$\begin{cases} M_l=M_{l2m}=0{,}5\left(M_{l2m-1}+\varphi_{2m}-\left|M_{l2m-1}-\varphi_{2m}\right|\right);\\ M_{l2m-1}=0{,}5\left(M_{l2m-2}+\varphi_{2m-1}-\left|M_{l2m-2}-\varphi_{2m-1}\right|\right);\\ \ldots\\ M_{lj}=0{,}5\left(M_{lj-1}+\varphi_j-\left|M_{lj-1}-\varphi_j\right|\right);\\ \ldots\\ M_{l2}=0{,}5\left(M_{l1}+\varphi_2-\left|M_{l1}-\varphi_2\right|\right);\\ M_{l1}=\varphi_1; \end{cases}$$

$$\varphi_1=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\sum_{i=1}^{n}X_i^0X_i+\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^0\right)^2-\left(r_1-l\right)^2.$$

Рассмотренные в статье алгоритмы решения поставленных задач доведены до программного обеспечения и апробированы на тестовых примерах и реальных электротехнических системах.

Пример

Для ЭТС, заданной множеством граничных точек, требуется получить аналитическое описание ее границы, определяющее допуск на значения первичных параметров системы, а также вычислить максимальный запас работоспособности и построить допусковую область G_l с заданным запасом работоспособности l = 0,2.

Для наглядности рассмотрим ЭТС, для которой условия работоспособности (1) имеют следующий вид:

$$f_1(\mathbf{X}) = f_1(X_1, X_1) = X_1^2 + X_1^2 - 2X_1X_{11}^0 - 2X_2X_{12}^0 + (X_{11}^0)^2 + (X_{12}^0)^2 - r_1^2 \le 0;$$

$$f_2(\mathbf{X}) = f_2(X_1, X_1) = X_1^2 + X_1^2 - 2X_1X_{11}^0 - 2X_2X_{12}^0 + (X_{11}^0)^2 + (X_{12}^0)^2 - r_2^2 \le 0;$$

$$f_3(\mathbf{X}) = f_3(X_1, X_1) = X_1^2 + X_1^2 - 2X_1X_{11}^0 - 2X_2X_{12}^0 + (X_{11}^0)^2 + (X_{12}^0)^2 - r_3^2 \le 0;$$

$$X_1 \ge 0;\ 1 - X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0;\ 1 - X_2 \ge 0.$$

При аппроксимации границы области работоспособности ЭТС по формуле (4) были получены следующие численные значения:

$$R_1 = 1{,}05;\ R_1 = 0{,}95;\ R_3 = 0{,}8;\ X_{11}^0 = -0{,}1;\ X_{12}^0 = 0;\ X_{21}^0 = 0;\ X_{22}^0 = 0{,}8;\ X_{31}^0 = 1;\ X_{32}^0 = -0{,}4.$$

Область работоспособности G описывается аналитически следующими уравнениями:

$$G = 0{,}5\left(M_Y + D_X - \left|M_Y - D_X\right|\right);$$

$$M_Y = 0{,}5\left(f_{12}(X_1, X_1) + f_3(X_1, X_1) - \left|f_{12}(X_1, X_1) - f_3(X_1, X_1)\right|\right);$$

$$f_{12}(X_1, X_1) = 0{,}5\left(f_1(X_1, X_1) + f_2(X_1, X_1) - \left|f_1(X_1, X_1) - f_2(X_1, X_1)\right|\right);$$

$$D_X = 0{,}25\left(2 - |2X_1 - 1| - |2X_2 - 1| - \big||2X_1 - 1| - |2X_2 - 1|\big|\right).$$

Аналогичным образом описывается и допусковая область G_l, только в уравнениях $f_1(\mathbf{X})$, $f_2(\mathbf{X})$, $f_3(\mathbf{X})$ вместо радиусов r_1, r_2, r_3 следует соответственно писать $r_1 - l$, $r_2 - l$, $r_3 - l$.

На рисунке в пространстве параметров X_1, X_2 приведены аппроксимирующие область работоспособности окружности (выделены сплошными линиями). Ограничением при аналитическом описании этой области, как видно из рисунка, является также неравенство $X_2 \ge 0$.

Ограничительные линии, представленные на рисунке пунктиром, определяют допусковую область G_l, которой соответствует запас работоспособности системы l = 0,2.

Запишем выражение для целевой функции λ. В общем случае $\lambda = 0{,}5\left(L + D_X - \left|L - D_X\right|\right)$, где $L = l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$. При этом $l_1 = r_1 - \sqrt{r_1^2 + f_1(\mathbf{X})}$, $l_2 = r_2 - \sqrt{r_2^2 + f_2(\mathbf{X})}$, $l_3 = r_3 - \sqrt{r_3^2 + f_3(\mathbf{X})}$.

Используя свойства R-функций, окончательно получим

$$L = 0{,}25\left(l_1 + l_2 + l_3 - |l_1 - l_2| - \big|l_1 + l_2 - l_3 - |l_1 - l_2|\big|\right).$$

Выражение для аналитического описания допусковой области D_X получено выше.

Для оптимизации был использован разработанный модифицированный алгоритм симплексного поиска [7]. В результате были получены следующие координаты оптимальной точки: $X_{1опт}$ = 0,511, $X_{2опт}$ = 0,416. На рис. 1 они показаны в виде точки. При этом максимальный запас работоспособности ЭТС получился равным L = 0,3107. При заданных ограничениях на значения первичных параметров системы $l \in [0; 0{,}5]$.

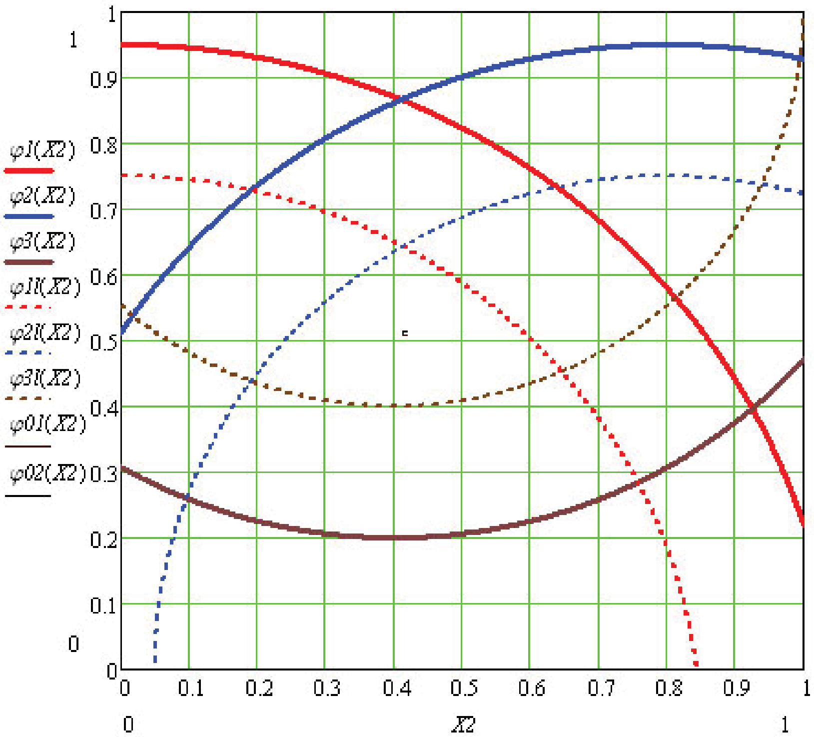

Рис. 1. Иллюстрация допустимых пределов изменения первичных параметров

Заключение

Предложенные алгоритмы параметрического синтеза ЭТС позволяют существенно повысить достоверность аппроксимации области работоспособности, что особенно актуально для сложных систем, характеризующихся большим числом первичных параметров. Полученное выражение для целевой функции позволяет достаточно просто решить задачу параметрической оптимизации системы по критерию запаса работоспособности. Следует отметить, что разработанные алгоритмы целесообразно использовать при большой размерности пространства первичных параметров. В этом случае единственной альтернативой остается аппроксимация области работоспособности вписанным в нее гиперпараллелепипедом. Однако при таком подходе к назначению допусков на параметры системы методическая погрешность аппроксимации становится недопустимо большой. Это является следствием того, что при больших размерностях пространства первичных параметров основной объем области работоспособности сосредоточен в непосредственной близости от ее границы.

Рассмотренные алгоритмы были апробированы на тестовых примерах и при решении задач параметрического синтеза разнообразных электротехнических систем.

Список литературы

1. *Саушев А. В.* Методы управления состоянием электротехнических систем / А. В. Саушев. — СПб.: СПГУВК, 2004. — 126 с.

2. *Абрамов О. В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности / О. В. Абрамов. — М.: Наука, 1992. — 176 с.

3. *Норенков И. П.* Основы автоматизированного проектирования / И. П. Норенков. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 336 с.

4. *Саушев А. В.* Синтез настраиваемых электротехнических систем / А. В. Саушев // Журнал Университета водных коммуникаций. — СПб.: СПГУВК, 2012. — Вып. 4 (16).

5. *Саушев А. В.* Математическое описание областей работоспособности электромеханических систем / А. В. Саушев // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2013. — № 6.

6. *Саушев А. В.* Аналитическое описание областей работоспособности электротехнических систем / А. В. Саушев // Журнал Университета водных коммуникаций. — СПб.: СПГУВК, 2009. — Вып. 4 (IV).

7. *Саушев А. В.* Области работоспособности электротехнических систем / А. В. Саушев. — СПб.: Политехника, 2013. — 412 с.

8. *Диго Г. Б.* Использование эллипсоидов для описания области работоспособности / Г. Б. Диго, Н. Б. Диго // Информационные технологии. — 2008. — № 1 (15).

9. *Саушев А. В.* Аналитический метод назначения допусков на параметры динамических систем / А. В. Саушев // Информатика и системы управления. — 2012. — № 3 (33).

10. *Саушев А. В.* Методы линейной аппроксимации граничных точек областей работоспособности технических систем / А. В. Саушев // Журнал Университета водных коммуникаций. — СПб.: СПГУВК, 2013. — Вып. 3 (19).

11. *Саушев А. В.* Запас работоспособности как целевая функция при синтезе технических систем / А. В. Саушев // Математика и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр. — СПб., 2011. — Вып. 3.

12. *Саушев А. В.* Метод и алгоритмы параметрического синтеза электротехнических систем по критерию запаса работоспособности / А. В. Саушев // Информационные технологии. — 2012. — № 12.

13. *Саушев А. В.* Параметрический синтез технических систем на основе линейной аппроксимации области работоспособности / А. В. Саушев // Автометрия. — 2013. — Т. 49, № 1.

14. *Саушев А. В.* Аналитический и поисковый методы параметрической оптимизации технических систем / А. В. Саушев // Журнал Университета водных коммуникаций. — СПб.: СПГУВК, 2011. — Вып. 3 (11).

15. *Рвачев В. Л.* Геометрические приложения алгебры логики / В. Л. Рвачев. — Киев: Техника, 1967. — 213 с.

16. *Саушев А. В.* Планирование эксперимента в электротехнике / А. В. Саушев. — СПб.: СПГУВК, 2012. — 272 с.

17. *Соболь И. М.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И. М. Соболь, Р. В. Статников. — М.: Дрофа, 2006. — 176 с.

УДК 621.181.012

В. Е. Панамарев,
ФГБОУ ВПО «Государственный морской университет им. адм. Ф. Ф. Ушакова»

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИЗБЫТКА ВОЗДУХА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ КОТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ НА СОСТАВ ОТРАБОТАННЫХ ГАЗОВ

INFLUENCE OF AUXILIARY BOILER EXCESS AIR COEFFICIENT ON EXHAUST GAS COMPONENTS

В настоящее время существуют утвержденные требования к выбросам вредных веществ в атмосферу с отработанными газами двигателей внутреннего сгорания [1]. Данные требования не распростра-