

СУДОСТРОЕНИЕ И СУДОРЕМОНТ

УДК 539.384:629.12

С. О. Барышников,
д-р техн. наук, профессор,
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова;

М. В. Сухотерин,
д-р техн. наук, профессор,
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова;

К. О. Ломтева,
аспирант,
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова

РАСЧЕТ НА ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПАНЕЛИ ОБШИВКИ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ РЕБРОМ ЖЕСТКОСТИ

CALCULATION OF THE BENDING OF A RECTANGULAR PANEL SHEETING WITH A CENTRAL RIB

В статье приведено решение задачи изгиба защемленной прямоугольной плиты с центральным ребром жесткости. Использован итерационный метод суперпозиции исправляющих функций в виде гиперболическо-тригонометрических рядов, дающий в пределе точное решение.

The article gives the solution of the problem of bending of a clamped rectangular plate with a Central rib. An iterative method of superposition of correcting functions in the form of hyperbolic-trigonometric series giving the exact solution in the limit is used.

Ключевые слова: защемленная пластина, обшивка, изгиб, ребро жесткости, итерационный метод, ряды Фурье, точное решение.

Key words: clamped plate, sheathing, bending, rib, iteration method, Fourier series, exact solution.

ПРОБЛЕМА определения напряженно-деформированного состояния обшивки судовых и гидротехнических конструкций (гидрозатворов, ворот шлюзовых камер и т. п.) под действием поперечной нагрузки весьма актуальна для инженерных расчетов. Особый интерес представляют элементы обшивки, подкрепленные ребрами жесткости.

Физическая модель задачи. Физической моделью элемента обшивки, заключенного между основным силовым набором, является защемленная по всем граням прямоугольная пластина постоянной толщины h . Пусть ее размеры $a \times 2b$ в плане, а ребро жесткости делит ее на два равных прямоугольника $a \times b$. Будем считать, что на пластину действует равномерное давление интенсивности q_0 . Ребро и пластина могут быть изготовлены из разных материалов. Обозначим $E_p I_p$ — жесткость ребра. Здесь E_p — модуль Юнга материала ребра; I_p — момент инерции сечения ребра. Если перейти к безразмерным координатам $x = X / b$, $y = Y / b$, то пластина будет иметь размеры $\gamma \times 2$, где $\gamma = a / b$. Согласно П. Ф. Папковичу [1], можно рассматривать половину пластины с разрезом по оси ребра (рис. 1).

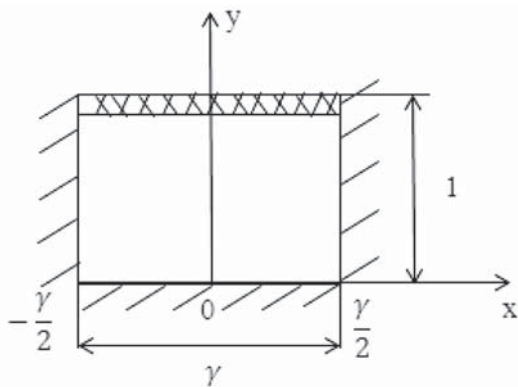


Рис. 1. Половина пластины
с разрезом по оси ребра

Рис. 1. Половина пластины с разрезом по оси ребра

Требуется определить прогибы (деформацию) пластины для любой точки срединной поверхности, а также соответствующие напряжения.

Математическая модель задачи. Требуется найти функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую [1] дифференциальному уравнению изгиба:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = -1 \quad (1)$$

и граничным условиям:

$$w|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0} = 0; \quad (2)$$

$$w|_{x=\pm \frac{\gamma}{2}} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=\pm \frac{\gamma}{2}} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}|_{y=1} = 0; \quad V_y^*|_{y=1} = - \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - G \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right]_{y=1} = 0. \quad (4)$$

Здесь ∇^2 — двумерный оператор Лапласа; $w = \frac{W D}{q_0 b^4}$ — относительный прогиб; W — абсолютный прогиб; $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость материала пластины; E — модуль Юнга материала пластины; ν — коэффициент Пуассона, $G = \frac{1}{2} \frac{E_p I_p}{b D}$ — относительная жесткость половины ребра.

Построение решения. Задачу будем решать итерационным методом суперпозиции исправляющих функций [2–4].

Частное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям отсутствия прогибов на защемленных краях, возьмем в виде многочлена четвертой степени:

$$w_0 = -\frac{1}{8} \left(x^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) (y^2 - 2y). \quad (5)$$

Функция (5) удовлетворяет также условиям (4) в продольном сечении ребра, однако порождает невязки по углам поворота в заделках:

$$\theta_{y0}|_{y=0} = \frac{\partial w_0}{\partial y}|_{y=0} = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right); \quad \theta_{x0}|_{x=\pm \frac{\gamma}{2}} = \frac{\partial w_0}{\partial x}|_{x=\pm \frac{\gamma}{2}} = -\frac{\gamma}{8} (y^2 - 2y). \quad (6)$$

Сначала займемся второй невязкой (6), которую разложим в ряд Фурье по синусам:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x}|_{x=\pm \frac{\gamma}{2}} = -\frac{\gamma}{8} (y^2 - 2y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{k0} \sin \lambda_k y, \quad (7)$$

$$\text{где } \lambda_k = \frac{k\pi}{2}, \quad b_{k0} = \frac{\gamma}{2\lambda_k^3}.$$

Будем компенсировать эту невязку функциональным рядом:

$$w_{11} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (A_{k1} \operatorname{ch} \lambda_k x + B_{k1} x \operatorname{sh} \lambda_k x) \sin \lambda_k y. \quad (8)$$

Коэффициенты ряда находим при удовлетворении граничным условиям (3):

$$B_{k1} = -\frac{b_{k0}}{\eta_k \operatorname{ch} \frac{\lambda_k \gamma}{2}}; \quad A_{k1} = -\frac{\gamma}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k \gamma}{2} B_{k1}, \quad (9)$$

где

$$\eta_k = \operatorname{th} \frac{\lambda_k \gamma}{2} + \frac{\lambda_k \gamma}{2} / \operatorname{ch}^2 \frac{\lambda_k \gamma}{2}.$$

Функция w_{11} в свою очередь порождает невязки на гранях $y = 0, y = 1$:

$$\begin{aligned} \theta_{y1}|_{y=0} &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k (A_{k1} \operatorname{ch} \lambda_k x + B_{k1} x \operatorname{sh} \lambda_k x); \\ V_{y1}^*|_{y=1} &= - \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right]_{y=1} + G \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Big|_{y=1} = \\ &= -G \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \lambda_k^3 [A_{k1} \lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_{k1} (4 \operatorname{ch} \lambda_k x + \lambda_k x \operatorname{sh} \lambda_k x)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Разложим эти невязки, а также первую невязку (6) от частного решения в ряды Фурье по косинусам:

$$\theta_{y0}|_{y=0} = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} a_{s0} \cos \mu_s x,$$

где $\mu_s = \frac{\pi s}{\gamma}, \quad a_{s0} = \frac{2}{\gamma \mu_s^3}.$

Первое выражение в формуле (10) примет вид

$$\theta_{y1}|_{y=0} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k (A_{k1} \operatorname{ch} \lambda_k x + B_{k1} x \operatorname{sh} \lambda_k x) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} a_{s1} \cos \mu_s x,$$

где

$$a_{s1} = \frac{8}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \tilde{B}_{k1}}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2}; \quad \tilde{B}_{k1} = -\frac{b_{k0}}{\eta_k}.$$

Суммарная невязка по углу поворота от w_0 и w_{11} будет

$$\theta_{y1}^*|_{y=0} = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} a_{s1}^* \cos \mu_s x; \quad a_{s1}^* = a_{s0} + a_{s1};$$

Разложение второго выражения в формуле (10):

$$\begin{aligned} V_{y1}^*|_{y=1} &= -G \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \lambda_k^3 [A_{k1} \lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_{k1} (4 \operatorname{ch} \lambda_k x + \lambda_k x \operatorname{sh} \lambda_k x)] = \\ &= \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} t_{s1} \cos \mu_s x, \end{aligned}$$

где

$$t_{s1} = G \frac{8}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \frac{\lambda_k^3 (\lambda_k^2 + 2\mu_s^2)}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2} \tilde{B}_{k1}.$$

Чтобы компенсировать эти невязки, возьмем вторую исправляющую функцию:

$$\begin{aligned} w_{21}(x, y) &= \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} [C_{s1} \operatorname{sh} \mu_s (y-1) + D_{s1} \operatorname{ch} \mu_s (y-1) + \\ &+ E_{s1} (y-1) \operatorname{ch} \mu_s (y-1) + F_{s1} (y-1) \operatorname{sh} \mu_s (y-1)] \cos \mu_s x. \end{aligned} \quad (11)$$

Потребуем, чтобы удовлетворялись условия на гранях $y = 0, y = 1$, что дает

$$C_{s1} = -\frac{1}{2\xi_{\gamma s}} \left[-G \frac{a_{s1}^*}{\operatorname{sh} \mu_s} + \frac{1}{\mu_s^4} \left(\operatorname{cth} \mu_s + \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) t_{s1} \right],$$

$$D_{s1} = -\frac{1}{2\xi_s} \left[\frac{2a_{s1}^*}{\mu_s \operatorname{sh} \mu_s} + \frac{1}{\mu_s^4} \left(1 - \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) t_{s1} \right],$$

$$E_{s1} = -\mu_s C_{s1}, \quad F_{s1} = (1 - \mu_s \operatorname{cth} \mu_s) C_{s1} - D_{s1} \operatorname{cth} \mu_s,$$

где

$$\xi_s = \frac{\operatorname{cth} \mu_s}{\mu_s} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} + \frac{G}{2} \left(1 - \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right).$$

Здесь коэффициенты E_{s1} и F_{s1} выражены через базовые коэффициенты C_{s1} , D_{s1} .
Найдем невязки от w_2 на гранях $x = \pm \gamma/2$ и разложим их в ряд Фурье по синусам:

$$\begin{aligned} \theta_{x1} \Big|_{x=\pm \frac{\gamma}{2}} &= \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s \{ (\operatorname{sh} \mu_s (y-1) + (y-1) \operatorname{sh} \mu_s (y-1) - \\ &- \mu_s [(y-1) \operatorname{ch} \mu_s (y-1) + \operatorname{cth} \mu_s (y-1) \operatorname{sh} \mu_s (y-1)]) C_{s1} + \\ &+ [\operatorname{ch} \mu_s (y-1) - \operatorname{cth} \mu_s (y-1) \operatorname{sh} \mu_s (y-1)] D_{s1} \} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{k1} \sin \lambda_k y, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} b_{k1} &= 2 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s^2}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2 \xi_s} \left\{ (-1)^{\tilde{k}} \left[-G \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh} \mu_s} a_{s1}^* + \frac{1}{\mu_s^2} \left(\operatorname{cth} \mu_s + \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) t_{s1} \right] - \right. \\ &- \lambda_k \left[\left(\frac{2}{\mu_s} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) + G \left(\operatorname{cth} \mu_s - \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) \right) a_{s1}^* - \frac{1}{\mu_s^2 \operatorname{sh} \mu_s} t_{s1} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Для устранения этой невязки вновь возьмем исправляющую функцию первого вида:

$$w_{12}(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (A_{k2} \operatorname{ch} \lambda_k x + B_{k2} x \operatorname{sh} \lambda_k x) \sin \lambda_k y, \quad (12)$$

где подобно (9):

$$B_{k2} = -\frac{b_{k1}}{\eta_k \operatorname{ch} \frac{\lambda_k \gamma}{2}}; \quad A_{k2} = -\frac{\gamma}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k \gamma}{2} B_{k2}. \quad (13)$$

Далее итерационный процесс повторяется.

Приведем сводку формул для организации вычислительного процесса:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(x, y) + w_{2n}(x, y); \\ w_0 &= -\frac{1}{8} \left(x^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) (y^2 - 2y); \quad w_{1n} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (A_{kn} \operatorname{ch} \lambda_k x + B_{kn} x \operatorname{sh} \lambda_k x) \sin \lambda_k y. \\ w_{2n}(x, y) &= \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} \left[C_{sn} \operatorname{sh} \mu_s (y-1) + D_{sn} \operatorname{ch} \mu_s (y-1) + \right. \\ &+ E_{sn} (y-1) \operatorname{ch} \mu_s (y-1) + F_{sn} (y-1) \operatorname{sh} \mu_s (y-1) \left. \right] \cos \mu_s x. \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{a}{b}, \quad s = \frac{s+1}{2}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{2}, \quad b_{k0} = \frac{\gamma}{2\lambda_k^3}, \quad \mu_s = \frac{\pi s}{\gamma}, \quad a_{s0} = \frac{2}{\gamma \mu_s^3}.$$

$$\eta_k = \operatorname{th} \frac{\lambda_k \gamma}{2} + \frac{\lambda_k \gamma}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\lambda_k \gamma}{2}, \quad B_{kn} = -\frac{b_{k(n-1)}}{\eta_k \operatorname{ch} \frac{\lambda_k \gamma}{2}}; \quad A_{kn} = -\frac{\gamma}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k \gamma}{2} B_{kn}.$$

$$\tilde{B}_{kn} = -\frac{b_{k(n-1)}}{\eta_k}, \quad a_{sn} = \frac{8}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \tilde{B}_{kn}}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2} \quad (\text{при } n=1 \quad a_{s1} = a_{s0} + a_{s1});$$

$$t_{sn} = G \frac{8}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{k}} \frac{\lambda_k^3 (\lambda_k^2 + 2\mu_s^2)}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2} \tilde{B}_{kn}, \quad G = \frac{1}{2} \frac{E_p I_p}{bD} \text{ — вычисляется или задается};$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \xi_s = \frac{\operatorname{cth} \mu_s}{\mu_s} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} + \frac{G}{2} \left(1 - \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right),$$

$$C_{sn} = -\frac{1}{2\xi_s} \left[-G \frac{a_{sn}}{\operatorname{sh} \mu_s} + \frac{1}{\mu_s^4} \left(\operatorname{cth} \mu_s + \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) t_{sn} \right],$$

$$D_{sn} = -\frac{1}{2\xi_s} \left[\frac{2a_{sn}}{\mu_s \operatorname{sh} \mu_s} + \frac{1}{\mu_s^4} \left(1 - \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) t_{sn} \right],$$

$$E_{sn} = -\mu_s C_{sn}, \quad F_{sn} = (1 - \mu_s \operatorname{cth} \mu_s) C_{sn} - D_{sn} \operatorname{cth} \mu_s,$$

$$b_{kn} = 2 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s^2}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2 \xi_s} \left\{ (-1)^{\bar{k}} \left[-G \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh} \mu_s} a_{sn} + \frac{1}{\mu_s^2} \left(\operatorname{cth} \mu_s + \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) t_{sn} \right] - \right.$$

$$\left. -\lambda_k \left[\left(\frac{2}{\mu_s} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) + G \left(\operatorname{cth} \mu_s - \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) \right) a_{sn} - \frac{1}{\mu_s^2 \operatorname{sh} \mu_s} t_{sn} \right] \right\}, \quad (14)$$

далее вновь вычисляются коэффициенты $A_{k(n+1)}$, $B_{k(n+1)}$ и т. д. Коэффициенты рядов w_{1n} , w_{2n} суммируются после каждой итерации.

При достижении заданной точности (невязки выполнения граничных условий должны стремиться к нулю) итерационный процесс прекращается и вычисляются прогибы пластины, моменты, перерезывающие силы и напряжения.

Анализ сходимости итерационного процесса. Нетрудно убедиться, что коэффициенты невязок b_{kn} (14) линейно зависят от аналогичных коэффициентов $b_{k(n-1)}$ предыдущей итерации. Коэффициенты b_{k0} начальной невязки (7) имеют порядок $b_{k0} = O(1/k^3)$, а для последующих итераций — $b_{kn} = O(\ln k / k^3)$. Поэтому можно записать $b_{kn} = \beta_{kn} / \lambda_k^2$, где β_{kn} — некоторая бесконечно малая величина при $k \rightarrow \infty$. Тогда формула (14) примет вид

$$\beta_{kn} = 2\lambda_k^2 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s^2}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2 \xi_s} \left\{ (-1)^{\bar{k}} \left[-G \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh} \mu_s} \alpha_{sn} + \frac{1}{\mu_s^2} \left(\operatorname{cth} \mu_s + \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) \tau_{sn} \right] - \right.$$

$$\left. -\lambda_k \left[\left(\frac{2}{\mu_s} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) + G \left(\operatorname{cth} \mu_s - \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) \right) \alpha_{sn} - \frac{1}{\mu_s^2 \operatorname{sh} \mu_s} \tau_{sn} \right] \right\},$$

где

$$\alpha_{sn} = -\frac{8}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_{k(n-1)}}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2 \eta_k}, \quad \tau_{sn} = -G \frac{8}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{k}} \frac{\lambda_k (\lambda_k^2 + 2\mu_s^2)}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2 \eta_k} \beta_{k(n-1)}.$$

Поэтому если положить все $\beta_{k(n-1)} = 1$, то критерием сходимости будет $|\beta_{kn}| < 1$ при всех значениях k .

Численные результаты. Проверка сходимости производилась с помощью компьютера в среде Maple. Для пластины с отношением сторон 1:2 (ребро делит пластину на два квадрата) было установлено, что процесс сходится для значений относительной жесткости $0 \leq G \leq 0,44$.

Для вычисления прогибов была составлена программа в Maple. Число итераций менялось в широких пределах. На печать выводились невязки выполнения граничных условий на каждой итерации. Непосредственные вычисления показали, что во второй половине интервала сходимости (от $G = 0,2$ до $G = 0,44$) вычислительный процесс является неустойчивым. При небольшом количестве членов в рядах (до 40) невязки действительно убывали; с увеличением числа членов начальные итерации давали сначала сходящийся процесс, а затем наблюдался незначительный рост невязок, то есть процесс начинал расходиться. Подробные вычисления показали, что верхняя граница сходимости должна быть принята на практике равной 0,2. Следует отметить, что попытки увеличить точность вычислений увеличением числа членов в рядах до 2000, числа итераций до 100 и мантиссы до 500 знаков не привели к желаемому результату, резко увеличивая время вычислений. Причиной этого, на наш взгляд, является присутствие в граничных условиях (4) частной производной четвертого порядка $G \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ (наличие ребра жесткости), что приводит к медленно сходящемуся числовому ряду для t_{sn} , а затем и других рядов. В ходе итерационного процесса этот ряд многократно используется в цикле; при этом накапливаются погрешности вычислений из-за того, что максимальное значение членов ряда сдвигается вправо (члены ряда сначала возрастают). Возможно, значительное увеличение числа членов в рядах (10 000 и более) позволит получить сходящийся процесс. Но, может быть, следует ограничиться таким количеством членов и таким числом итераций, при которых процесс сопровождается уменьшением невязок (несколько первых итераций).

Таким образом, увеличение жесткости ребра ухудшает сходимость итерационного процесса получения точного решения и делает невозможным проследить асимптотику при $G \rightarrow \infty$. Надежные результаты имеют место для значений относительной жесткости ребра $0 \leq G \leq 0,2$.

Для проверки правильности алгоритма и программы определялись прогибы гладкой пластины (без ребра полагалось $G = 0$). Форма изогнутой поверхности и максимальное значение прогиба в центре пластины $w(0; 1) = -0,0025329$ полностью совпали с результатами, полученными в [5] при постановке задачи для гладкой пластины. В работе [6] это значение равно $-0,00254$.

В качестве примера приведем результаты вычисления прогибов и форму изогнутой поверхности пластины с отношением сторон 1:2. Относительная жесткость ребра принята равной $G = 0,1$.

Значение прогиба в середине ребра составило $w(0; 1) = -0,0020025$. В рядах удерживалось 59 членов; число итераций 20. Коэффициенты невязок b_{kn} уменьшились по абсолютной величине на пять порядков, то есть практически обратились в нуль на 20-й итерации. При удержании в рядах 199 членов прогиб в середине ребра составил $w(0; 1) = -0,0020037$.

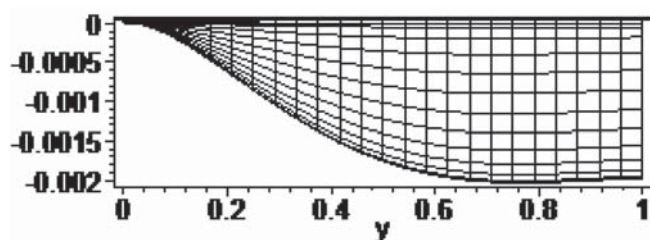


Рис. 2. Изогнутая поверхность пластины (вид со стороны оси OX) при $G = 0,1$

На рис. 2 приведена форма изогнутой поверхности половины пластины, которая показывает, что наличие ребра даже с небольшой жесткостью существенно уменьшает прогибы пластины. Левее ребра появляется максимум.

Прогибы вычислялись также для относительной жесткости $G = 0,2$ при удержании 59 членов в рядах. На рис. 3, 4 показана соответствующая форма изогнутой поверхности.

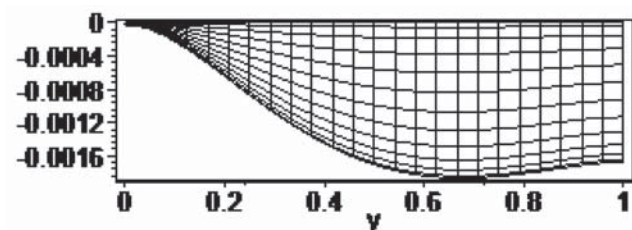


Рис. 3. Изогнутая поверхность пластины
(вид со стороны оси Ox) при $G = 0,2$

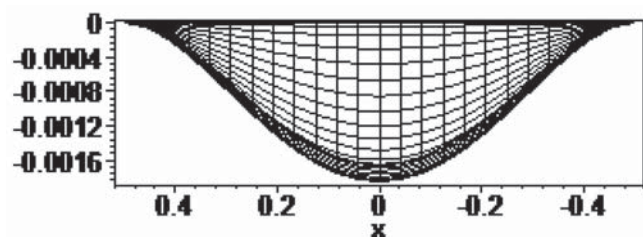


Рис. 4. Изогнутая поверхность пластины
(вид со стороны оси Oy) при $G = 0,2$

Значение прогиба в середине ребра составило $w(0; 1) = -0,0016559$. Более жесткое ребро заметно уменьшило прогиб пластины.

Рисунки 3, 4 показывают, что граничные условия для прогибов и углов поворота выполнены точно. Углы поворота всех четырех кромок в поперечном направлении равны нулю.

Выводы. Для пластины с центральным ребром, относительная жесткость которого находится в пределах от 0 до 0,2, получено аналитическое решение, дающее в пределе точное решение задачи. Исследована сходимость итерационного процесса. Приведены достоверные численные результаты определения прогибов пластины.

Полученные результаты могут быть использованы в практических расчетах НДС плоских элементов обшивки с ребром жесткости в судовых и гидротехнических конструкциях.

Список литературы

1. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля / П. Ф. Папкович. — Л.: Судпромгиз, 1941. — Ч. 2. — 960 с.
2. Сухотерин М. В. Расчет на изгиб прямоугольных защемленных панелей с одним свободным краем / М. В. Сухотерин // Гидротехническое строительство. — 2009. — № 10.
3. Сухотерин М. В. Оценка действия сосредоточенной силы на обшивку судна / М. В. Сухотерин, К. О. Ломтева // Журнал Университета водных коммуникаций. — 2011. — № 1.
4. Барышников С. О. Прочность, устойчивость, колебания плоских элементов судовых конструкций / С. О. Барышников, М. В. Сухотерин. — СПб.: Судостроение, 2012. — 167 с.
5. Сухотерин М. В. Математическое моделирование упругих плоских элементов судовых и гидротехнических конструкций: дис. ... д-ра техн. наук. / М. В. Сухотерин. — СПб.: СПГУВК, 2009. — 300 с.
6. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. — 635 с.