

15. Tewari U. S. Recent development in tribology of fibre reinforced composites with thermoplastic and thermosetting matrices / U. S. Tewari, J. Bijwe // *Advances in Composites Tribology*. — 1993. — Chap. 5.
16. Wang Y. AFM characterization of interfacial properties of carbon fibre reinforced composites subjected to hygrothermal treatments / Y. Wang, T. H. Hahn // *Composites science and Technology*. — 2007. — № 67.
17. Wilczewska I. Badanie mechanizmu tarcia i zużycia polimerów wzmacnianych włóknami węglowymi / I. Wilczewska // VII Międzynarodowa Konferencja. — Tarcie, 2012.

УДК 627.332, 519.63, 51.74

Т. Ю. Никитина,
аспирант,

ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова

ДИНАМИКА ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ БАЛКИ

DYNAMICS OF TRANSVERSE OSCILLATIONS OF A RIGID VERTICAL BEAM

Статья посвящена вопросу устойчивости конструкций из тонких вертикальных стен. Рассматривается математическая модель поперечных колебаний вертикальной упругой балки с защемленным нижним концом под действием внешней силы. Описаны алгоритмы решения дифференциального уравнения поперечных колебаний упругой балки с применением «балочных» функций А. Н. Крылова и метода Б. Г. Галеркина в варианте В. З. Власова — Л. В. Канторовича. Приведены результаты вычислительного эксперимента, выполненного в программе Mathcad.

The article is devoted to the stability of rising walls structures. A mathematical model of the vertical transverse vibrations of an elastic beam clamped at the lower end by an external force is considered. The algorithms for solving differential equations of transverse vibrations of an elastic beam with the use of “beam” functions of A. N. Krylov, and B. G. Galerkin in the version of V. Z. Vlasov — L. V. Kantorovich are described. The results of numerical experiments performed in the program Mathcad are given.

Ключевые слова: гидротехническое строительство, устойчивость сооружений, поперечные колебания упругой балки.

Key words: hydraulic engineering, sustainability of structures, transversal vibrations of an elastic beam.

Введение

В портовом строительстве для создания причальных и волнозащитных сооружений применяются конструкции с элементами тонких вертикальных стенок. На открытой акватории часто применяются больверки (тонкие подпорные стенки), выполненные из шпунтовых свай или свай специальных профилей. Использование таких сооружений связано с проблемой возникновения аварийных ситуаций при производстве работ в условиях открытой морской акватории, а именно:

- трещины, заломы элементов стен, расхождение замков;
- отклонение стенки от проектного положения;
- обрушение свайных рядов.

Из множества процессов, происходящих с тонкой вертикальной стенкой, заглубленной в грунт на морской акватории, представляют интерес [1]:

- колебания стержня под воздействием волновой нагрузки;

- волновые течения вблизи стенки;
- разжижение и вымывание частиц грунта.

Каждое из этих явлений описывается сложными математическими моделями в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Высокая сложность общей модели осложняет построение методик расчета. В проектной практике широко применяют специализированные вычислительные средства для прочностных расчетов на основе сеточных и конечно-элементных методов. Однако эти средства отличаются значительной стоимостью и являются избыточными для оценочных расчетов, отличающихся умеренными требованиями к точности расчета. С учетом погрешностей исходных данных погрешность оценочного расчета в 20 %, как правило, вполне приемлема. Поэтому актуальны различные упрощения вычислительных процедур, позволяющие применять при создании транспортной инфраструктуры распространенные и относительно недорогие математические пакеты, в частности систему автоматизации математических расчетов Mathcad [2], к преимуществам которой относят естественный математический язык информационного обмена и дружественный интерфейс. Следует также отметить наличие свободно распространяемого аналога этой программы.

Модель поперечных колебаний вертикальной упругой балки с защемленным нижним концом (рис. 1) под действием внешней возмущающей силы — одна из основных составляющих общей модели, описывается следующим дифференциальным уравнением [3–5] в частных производных (ДУЧП) для поперечных колебаний упругой балки (стержня):

$$\frac{E \cdot J}{m} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{c}{m} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{q}{m}, \quad (1)$$

где q — распределенная нагрузка;

E — модуль Юнга;

J — момент инерции сечения относительно главной оси перпендикулярной плоскости колебаний;

m — масса единицы длины стержня (погонная плотность);

c — коэффициент пропорциональности в выражении для силы внутреннего трения;

$0 \leq z \leq l$ — координата вдоль длины стержня.

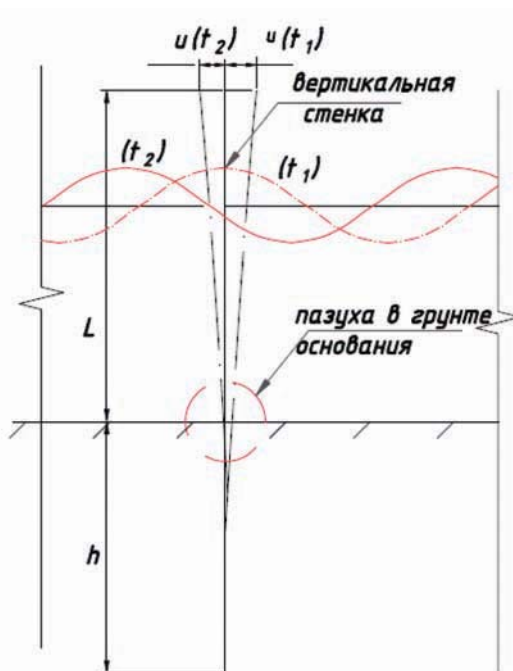


Рис. 1. Схема деформаций шпунтовой стенки при воздействии волн

Математическая формулировка граничных условий для стержня с закрепленным левым и свободным правым концами выражается следующими соотношениями.

Условия закрепления стержня в точке $z = 0$:

$$u(t, 0) = \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

Условия на свободном конце (при $z = L$):

$$\frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial z^3} = 0.$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$\begin{cases} u(0, z) = u_g(z); \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, z) \Big|_{t=0} = v_g(z), \end{cases}$$

где $u_g(z)$, $v_g(z)$ — заданные функции.

С целью взаимной проверки практически значимых результатов решения ДУЧП (1) с указанными выше краевыми и начальными условиями получим численные решения этого уравнения альтернативными методами, а именно методами Фурье в интерпретации А. Н. Крылова и Б. Г. Галеркина в варианте В. З. Власова — Л. В. Канторовича [3–7].

Предварительные преобразования

Поскольку метод Власова–Канторовича удобнее осуществлять на отрезке единичной длины, преобразуем уравнение к новой пространственной координате $x = z/L$, где $0 \leq x \leq 1$. В выражениях для начальных условий и распределенной нагрузки необходимо подставить значение $z = L \cdot x$. В результате замены пространственной переменной получим уравнение

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = F; \\ \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0; \\ u(0, x) = U g(x); \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = V g(x), \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha = c/(2 \cdot m)$, $\beta^2 = E \cdot J \cdot (m \cdot L^4)^{-1}$ и $F = q/m$ — параметры и возмущение.

Далее будем решать уравнение (2).

Решение методом Фурье

Решение поставленной задачи осуществим в два этапа. На первом этапе решим однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (3)$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде ряда $u(t, x) = \sum_k T_k(t) \cdot X_k(x)$, где $k = 0, 1, \dots, \infty$ — натуральные числа. Тогда в результате разделения переменных для каждого номера k получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 T_k}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{dT_k}{dt} + \sigma^2 \cdot T_k = 0; \\ \frac{d^4 X_k}{dx^4} - K^4 \cdot X_k = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где σ^2 и $K = \sqrt{(\sigma/\beta)}$ — параметры.

Первое из уравнений системы (4) является уравнением затухающих гармонических колебаний, общее решение которого:

$$T_k = A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta), \quad (5)$$

где A, θ — начальная амплитуда колебаний; $\omega^2 = \sigma^2 - \alpha^2$ — круговая частота колебаний.

Общее решение второго уравнения (4) выразим «взвешенной» суммой «балочных» функций Крылова:

$$X = c_0 \cdot S(x, K) + c_1 \cdot T(x, K) + c_2 \cdot U(x, K) + c_3 \cdot V(x, K),$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — постоянные «весовые» коэффициенты;

$S(x, K), T(x, K), U(x, K), V(x, K)$ — «балочные» функции А. Н. Крылова [3].

С учетом свойств «балочных» функций определим значения постоянных, исходя из граничных условий при $x = 0$ и $x = 1$. При этом $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, тогда

$$c_3 \cdot (S - T(1, K) \cdot V(1, K) \cdot (S(1, K))^{-1}) = 0. \quad (6)$$

Интерес представляет нетривиальное решение задачи, поэтому $c_3 \neq 0$ и уравнение (12) при $L = 1$ эквивалентно «частотному» [4] уравнению: $\cos(K) \cdot \operatorname{ch}(K) = -1$. Для определения «собственных частот» K воспользуемся аппроксимацией [6, с. 10–14]:

$$K_n = \pi \cdot (0.5 + n + e^{-4.37n} \cdot 10^{-2} \cdot (3.686 - 59.92 \cdot n + 4.054 \cdot n^6)).$$

Решения частотного уравнения пронумерованы номерами $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

При известных значениях параметра K и угловой частоты $\omega_n = \sqrt{\beta^2 \cdot K_n^4 - \alpha^2}$ решение временного уравнения имеет вид

$$T_{k,n} = A_n \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\sqrt{\beta^2 \cdot K_n^4 - \alpha^2} \cdot t + \theta_n), \quad (7)$$

где $T_{k,n}, A_n, \theta_n$ — постоянные.

Решение уравнения (4) для $X_n(x)$ при $K = K_n$ и $c_3 = 1$ есть собственная форма:

$$\varphi(x, n) = V(x, K_n) - \frac{T(1, K_n)}{S(1, K_n)} \cdot U(x, K_n). \quad (8)$$

Объединяя уравнения (7) и (8) и суммируя по индексу n , получим общее решение ДУЧП (3) в виде

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \varphi(x, n) \cdot \sin(\sqrt{\beta^2 \cdot K_n^4 - \alpha^2} \cdot t + \theta_n). \quad (9)$$

Частное решение выделим с помощью начальных условий:

$$U_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \varphi(x, n) \cdot \sin(\theta_n), \quad (10)$$

$$V_g(x) = \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) \Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \varphi(x, n) \cdot (\sqrt{\beta^2 \cdot K_n^4 - \alpha^2} \cdot \cos(\theta_n) - A_n \cdot \alpha \cdot \varphi(x, n) \cdot \sin(\theta_n)). \quad (11)$$

Разлагая выражения (10), (11) в ряды по собственным формам после вычислений определим ранее неизвестные амплитуду колебаний A_n , фазовый сдвиг θ_n :

$$\begin{cases} A_n = \psi_n \cdot \sin \left(\arctg \left(\frac{\psi_n \cdot \omega_n}{\eta_n + \alpha_n \cdot \psi_n} \right) \right)^{-1}; \\ \theta_n = \arctg \left(\frac{\psi_n \cdot \omega_n}{\eta_n + \alpha_n \cdot \psi_n} \right). \end{cases}$$

Разложим правую часть неоднородного ДУЧП (2) по собственным формам:

$$\begin{cases} F = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot \varphi(x, n); \\ q_n(t) = \left(\int_0^1 F(t, x) \cdot \varphi(x, n) \cdot dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \varphi_n(x, n)^2 \cdot dx \right)^{-1}, \end{cases}$$

где $q_n(t)$ — коэффициенты, полученные с учетом ортогональности форм.

Пусть, кроме того, $U_n = T_n(t) \cdot \varphi(x, n)$ — решение ДУЧП (2), соответствующее номеру n , тогда, переходя к почленным равенствам, получим

$$\left(\frac{d^2 T_n}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{dT_n}{dt} \right) \cdot \varphi(x, n) + \beta^2 \cdot T_n \cdot \frac{d^4 \varphi(x, n)}{dx^4} = q_n(t) \cdot \varphi(x, n).$$

Заметим, что $\frac{d^4 \varphi(x, n)}{dx^4} = K(n)^4 \cdot \varphi(x, n)$ (это следует из выражения (4)). В результате сокращения общего множителя $\varphi(x, n) \neq 0$ получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение (НЛДУ):

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{dT_n}{dt} + \sigma^2 \cdot T_n = q_n(t), \quad (12)$$

где $\beta^2 \cdot K^4 = \sigma^2$.

В соответствии с общей теорией линейных уравнений можно записать

$$T_n = Ts_n + Tv_n,$$

где Ts_n — общее решение (7) однородного дифференциального уравнения;
 Tv_n — частное решение НЛДУ (12).

При гармоническом возбуждении

$$q_n(t) = Um_n \cdot \sin(v \cdot t + \theta), \quad (13)$$

где Um_n, v, θ — неизвестная амплитуда, частота и фаза колебаний.

Будем искать решение уравнения (12) специального вида [5]:

$$Tv_n = \mu_n \cdot \sin(v \cdot t + \theta_v + \Delta\theta_n), \quad (14)$$

где $\mu_n, \theta, \Delta\theta_n$ — амплитуда, начальная фаза колебаний и сдвиг фазы соответственно.

Подставим (13) и (14) в (12), после промежуточных вычислений получим

$$\begin{cases} \mu_n = \frac{Um_n \cdot \cos(\Delta\theta_n)}{(\sigma^2 - v^2)}; \\ \Delta\theta_n = \arctg\left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot v}{(v^2 - K_n^4 \cdot \beta^2)}\right). \end{cases} \quad (15)$$

Итак, общее решение НЛДУ будет иметь вид

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(A_n \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_n \cdot t + \theta_n) + \mu_n \cdot \sin(v \cdot t + \theta_v + \Delta\theta_n) \right) \cdot \varphi(x, n) \right]. \quad (16)$$

Здесь параметры μ_n и $\Delta\theta$ вычисляются по формулам (15), а постоянные A_n и θ_n подлежат определению из начальных условий по формулам:

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_n &= \left(\int_0^1 V_g(x) \cdot \varphi(x, n) \cdot dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \varphi_n(x, n)^2 \cdot dx \right)^{-1}; \\ \psi_n &= \left(\int_0^1 U_g(x) \cdot \varphi(x, n) \cdot dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \varphi(x, n)^2 \cdot dx \right)^{-1}; \\ \theta_n &= \frac{\omega_n}{\frac{\eta_n - \mu_n \cdot \nu \cdot \cos(\theta_n + \Delta\theta_n)}{\psi_n - \mu_n \cdot \sin(\theta_n + \Delta\theta_n)} + \alpha}; \\ A_n &= \frac{\psi_n - \mu_n \cdot \sin(\theta_n + \Delta\theta_n)}{\sin(\theta_n)}; \\ \omega_n &= \sqrt{\beta^2 \cdot K_n^4 - \alpha^2}. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Алгоритм расчета методом Фурье

Полученные выше выражения положены в основу алгоритма, реализованного средствами системы автоматизации математических расчетов Mathcad. Алгоритм включает следующие операции:

- 1) ввод исходных данных, к которым отнесены коэффициенты ДУЧП (2), (3), а также параметры возмущения и временной интервал, на котором рассматривается решение ДУЧП;
- 2) выбор количества членов в разложении искомого решения по собственным формам N ;
- 3) расчет по формулам (17) коэффициентов разложения начальных условий и правой части ДУЧП по собственным формам с номерами в диапазоне $0 \leq n \leq N$;
- 4) аппроксимация искомого решения путем подстановки вычисленных в операции (2) коэффициентов в выражение (16).

Метод Галеркина–Власова–Канторовича

Идея метода Власова–Канторовича [7; 8] также базируется на разделении переменных. Здесь роль функций формы играют так называемые пробные функции, а искомое решение аппроксимируют отрезком ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^N a(t)_n \cdot \varphi(x)_n, \quad (18)$$

где $a(t)$ — коэффициенты, зависящие от времени;

$\varphi(x)_n$ — система из $(N + 1)$ пробной функции (считая номер $n = 0$), причем $\varphi(x)_0$ удовлетворяет граничным условиям;

$\varphi(x)_m$ — где $m = 1, 2, \dots, N$ удовлетворяет условиям $\varphi(0)_m = \varphi(1)_m = 0$.

Подставляя полученные выражения в выражения (2), находим невязку:

$$R = \sum_{n=0}^N \left(\frac{d^2 a(t)_n}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{da(t)_n}{dt} \right) \cdot \varphi(x)_n + \sum_{n=0}^N \beta^2 \cdot a(t)_n \cdot \frac{d^4 \varphi(x)_n}{dx^4} - F \neq 0.$$

Минимальное абсолютное значение невязки, соответствующее наилучшей аппроксимации решения задачи (2) функцией (18), достигается при ортогональности невязки R всем пробным функциям. Условие такой ортогональности формулируется в виде системы уравнений:

$$\int_0^1 R \cdot \varphi_m(x) \cdot dx = 0 \text{ при любом } 0 \leq m \leq n.$$

Для пробной функции $\varphi_m(x)$, где m произвольный номер, следует

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot JF_{m,n} + \sum_{n=0}^N \frac{da_n}{dt} \cdot 2 \cdot \alpha \cdot JF_{m,n} + \beta^2 \cdot \sum_{n=0}^N a_n \cdot J_{m,n} = JB_m ; \\ J_{m,n} = \int_0^1 \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} \cdot \varphi_m(x) \cdot dx ; \\ JF_{m,n} = \int_0^1 \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) \cdot dx ; \\ JB_m = \int_0^1 F \cdot \varphi_m(x) \cdot dx, \end{cases} \quad (19)$$

где $J_{m,n}$, $JF_{m,n}$, JB_m — коэффициенты.

Для всех значений m , получаем матричное уравнение:

$$JF \cdot \frac{d^2 \vec{a}}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot JF \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} + \beta^2 \cdot J \cdot \vec{a} = \vec{JB}. \quad (20)$$

С учетом особенностей систем компьютерной математики приведем уравнение (20) к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{V}_n ; \\ \frac{d\vec{V}_n}{dt} = JF^{-1} \cdot \vec{JB} - (JF^{-1} \cdot J) \cdot \beta^2 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \alpha \cdot \vec{V}. \end{cases} \quad (21)$$

Начальные значения векторов $\vec{a}$ и $\vec{V}$ определим разложением начальных условий по пробным функциям в соответствии с выражениями:

$$\begin{cases} a_m(0) = g_m = JF_{m,n}^{-1} \cdot \left[\int_0^1 u_g(x) \cdot \varphi_m(x) \cdot dx \right] ; \\ v_m(0) = JF_{m,n}^{-1} \cdot \left[\int_0^1 v_g(x) \cdot \varphi_m(x) \cdot dx \right]. \end{cases} \quad (22)$$

Учитывая, что программа Mathcad позволяет относительно просто вычислять значения интегралов, определяющих динамическую систему (21), и, кроме того, содержит развитые средства решения дифференциальных уравнений, практическая реализация метода Власова–Канторовича оказывается существенно проще. Для обоснования применимости тех или иных пробных функций необходимо выполнить оценочные расчеты и сравнить результаты, полученные различными методами.

Алгоритм расчета методом Власова–Канторовича

Алгоритм приближенного решения ДУЧП методом Власова–Канторовича реализован средствами системы автоматизации математических расчетов Mathcad. Алгоритм включает следующие операции:

- 1) ввод исходных данных, к которым отнесены коэффициенты ДУЧП (4), а также параметры возмущения и временной интервал, на котором рассматривается решение ДУЧП;
- 2) расчет матриц J , JF и вектора JB по формулам (19) на основе пробных функций:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 2 \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{3} x^4 ; \\ \varphi_m(x) = \varphi(m, x) = x^2 \cdot (1-x)^{m+4}, \end{cases} \quad (23)$$

где $m = 1, 2, \dots, N$ — номер пробной функции;

3) расчет векторов начальных условий по формулам (22):

4) решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (21) и вычисленных выше начальных условий с помощью встроенных функций программы Mathcad.

Вычислительный эксперимент

С целью проверки реализации описанных выше алгоритмов при решении практически значимых прикладных задач был осуществлен вычислительный эксперимент, заключающийся в расчете параметров колебаний шпунта типа Ларсен под воздействием гармонической волновой нагрузки [1]:

$$\begin{cases} F(t, x) = Ts(t) \cdot UM(x); \\ Ts(t) = \sin(vz \cdot t + \theta z); \\ UM(x) = \Delta P \cdot \text{if}(x \leq xa, 1, \text{if}(x \geq xb, 0, 1 - (x - xa) \cdot (xb - xa)^{-1})), \end{cases}$$

где $Ts(t)$, $UM(x)$ — функции времени и координаты;

vz , θ_z — угловая частота и начальная фаза возмущений;

ΔP — удельное давление на единицу относительной длины (величина характеризует разность давлений на вертикальную стену, в случае если уровни воды неодинаковы по обе стороны от нее);

xa , xb — константы, учитывающие разность уровней воды по обе стороны от стенки;

$\text{if}()$ — условная функция [9].

На предварительном этапе эксперимента было выполнено сравнение результатов расчетов двумя методами, показавшее хорошее совпадение результатов при нескольких тестовых наборах параметров возмущения и колеблющейся балки. При этом в разложениях удерживалось по пять членов ($N = 4$). Следовательно, система пробных функций (23) подходит для решения рассматриваемого класса задач.

Далее, методом Власова–Канторовича были построены табличные зависимости прогиба от относительной длины балки (координата x) при различных значениях угловой частоты возмущения vz . На завершающем этапе зависимости прогиба балки от ее относительной длины были аппроксимированы полиномами третьей степени (первое выражение в системе (24)). В свою очередь для коэффициентов искомого полинома также были построены полиномы (второе выражение в системе (24)), описывающие изменения этих коэффициентов в зависимости от угловой частоты возмущения, выраженной в долях числа Архимеда π .

В результате чего зависимость амплитуды прогиба балки от относительной длины и частоты возмущения была представлена математической моделью:

$$\begin{cases} u = \sum_{n=0}^3 b_n \cdot x^n; \\ b_n = \sum_{m=0}^3 B_{m,n} \cdot z^m; \\ z = vz/\pi, \end{cases} \quad (24)$$

где B — матрица констант.

В частном случае ДУЧП с параметрами, представленными в табл. 1, в результате аппроксимации были получены компоненты матрицы B , приведенные в табл. 2.

Таблица 1

Параметры ДУЧП

Параметр	ед. измерения	Значение
ΔP	кГ	49,4
Δz	рад	0
χa	—	0,8
χb	—	0,8
α	—	0,0199
β	—	7,112

Таблица 2

Матрица коэффициентов В

m	n			
	0	1	2	3
0	-5.306304E-4	0.0112193	0.1007814	-0.0426477
1	9.6927823E-6	-2.222159E-4	3.4844199E-3	-1.497188E-3
2	-1.9364113E-5	3.9119059E-4	6.364925E-3	-2.707281E-3
3	2.4506438E-6	-5.1477114E-5	-8.3594543E-5	3.4123641E-5

Графики зависимости амплитуды прогиба балки от ее относительной длины при различных значениях частоты возмущения показаны на рис. 2.

Таким образом, данный алгоритм позволил оценить прогибы свайного ряда для различных частот воздействия волны. Графики на рис. 2 описывают значения прогибов в диапазоне волн с периодом от 0,70 до 20 с, что соответствует практическим условиям эксплуатации портовых ГТС.

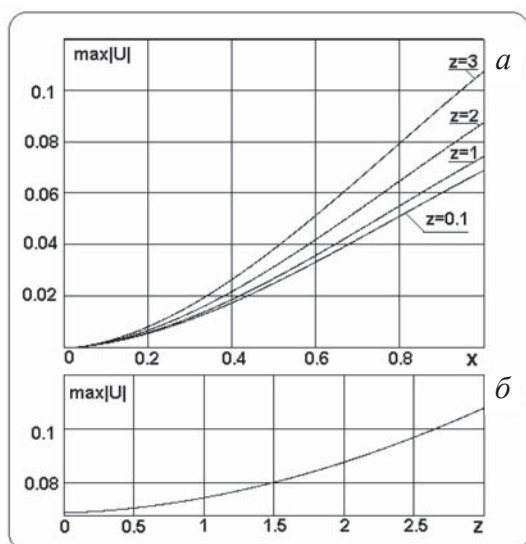


Рис. 2. а — графики зависимости амплитуды прогиба $\max |U|$ балки от ее относительной длины при различных значениях частоты возмущения; б — график зависимости амплитуды прогиба $\max |U|$ балки от значения частоты возмущения

Выводы

Исследование упругих поперечных колебаний балки с зашпунтованным концом методами Фурье в интерпретации А. Н. Крылова, и Б. Г. Галеркина в варианте В. З. Власова — Л. В. Канторовича показало, что отличающийся более простой реализацией средствами программы Mathcad метод Власова–Канторовича с пробными функциями (23) вполне приемлем для решения рассматриваемого класса задач.

Построена полиномиальная математическая модель, позволяющая оперативно оценивать прогиб балки в заданном диапазоне параметров волны, не решая дифференциальных уравнений.

Аналогичная математическая модель может быть построена и для других параметров воздействия и балки. Полученные результаты целесообразно использовать при выборе типа шпунтовых свай с учетом волновых параметров.

Список литературы

1. Строительные нормы и правила 2.06.04-82*. Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов). — М.: Госстрой СССР, 1989. — 71 с.
2. Дьяконов В. П. Энциклопедия Mathcad 200i и Mathcad 11 / В. П. Дьяконов. — М.: СОЛОН-Пресс, 2004. — 384 с.
3. Крылов А. Н. Избранные труды / А. Н. Крылов; ст. и ред. Ю. А. Шиманского, примеч. И. Г. Хановича. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — (Сер. «Классики науки»).
4. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов / Ю. Н. Работнов. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. — 456 с.
5. Стоценко А. А. Курс теории сооружений. Строительная механика. / А. А. Стоценко [и др.]. — Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2007. — Ч. 1: Теория сооружений в инженерном деле. — Прил. 2: Нагрузка и оценка эксплуатационных качеств сооружений при динамических воздействиях землетрясений и ветра. — 80 с.
6. Пахоменкова Т. Ю. О применении численного метода решения уравнений А. В. Драгилева в задаче расчета собственных частот поперечных колебаний упругой балки / Т. Ю. Пахоменкова // ФЭН-Наука: период. журн. науч. тр. — Бугульма, 2012. — 69 с.
7. Флетчер К. Численные методы на основании метода Галеркина: пер. с англ. / К. Флетчер. — М.: Мир, 1988 — 352 с.
8. Ильин В. П. Численные методы решения задач в строительной механике: справ. пособие / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников; под ред. В. П. Ильина. — Минск: Высш. шк., 1990.
9. Пахоменкова Т. Ю. Исследование устойчивости шпунтовых стен при волновом воздействии / Т. Ю. Пахоменкова // Гидроэнергетика. Новые разработки и технологии: тез. науч.-техн. конф. / ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, октябрь 2012 г. — СПб., 2012.