

Таким образом, проведенное исследование и предложенный графоаналитический метод определения максимально допустимого зазора S между барабаном трения и фрикционными колодками резинокордного баллона ШПМ позволит конструировать шинно-пневматические муфты, обеспечивающие надежную передачу момента вращения без уменьшения площади контакта в течение гарантированного срока службы баллона.

Расчет каркаса РКБ ШПМ на прочность целесообразно вести с учетом выбранного радиального зазора S и при полном износе фрикционного слоя колодок.

Полученные результаты расчетов по предложенным выражениям (1)–(5) достоверно согласуются с результатами стендовых и эксплуатационных испытаний ШПМ в приводах судовых, нефтебуровых и нефтегазовых установок, машин и оборудования различного назначения.

Предложенные выражения могут быть применены при модернизации существующих и разработке новой, предполагающей использование компьютерной программы методики расчета и проектирования ШПМ с повышенными эксплуатационными параметрами.

Список литературы

1. Чулкин С. Г. Расчет максимально допустимого зазора в шинно-пневматической муфте: [текст] / С. Г. Чулкин, Б. Д. Кукаленко // Журнал Университета водных коммуникаций. — СПб.: ГУМРФ, 2013. — Вып. 3 (19).
2. Кукаленко Б. Д. Силовые элементы упругих муфт. Конструирование, производство, эксплуатация: [текст] / Б. Д. Кукаленко. — Л.: Химия, 1977. — 143 с.
3. Кукаленко Б. Д. Исследование и расчет основных статических нагрузок баллонов шинно-пневматических муфт: [текст] / Б. Д. Кукаленко, С. Г. Чулкин // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Наука и образование. — 2012. — № 3 (154).

УДК 519.63:539.384:629.12

К. О. Ломтева,
аспирант,

ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПАНЕЛИ ОБШИВКИ С РЕБРОМ ЖЕСТКОСТИ ОТ ДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

CALCULATION OF DEFORMATION OF A RECTANGULAR PANEL CLADDING WITH STIFFENING RIB ON THE ACTION OF THE TRANSVERSE LOAD

В статье приведено численное исследование решения задачи изгиба защемленной по контуру прямоугольной панели с одним ребром жесткости. Итерационный метод суперпозиции исправляющих функций в виде гиперболическо-тригонометрических рядов дает в пределе решение, сходимость и точность которого зависят от числа членов в рядах и числа итераций. Представлены численные результаты для прогибов пластины.

The article provides a numerical study of solutions of tasks bending trapped on a contour of a rectangular panel with one ribs. The iterative method of superposition of correcting functions in the form of hyperbolic-trigonometric series gives in the limit solution, convergence and accuracy of which depends on the number of members in the ranks and the number of iterations. Presented numerical results for the deflection of the plate.

Ключевые слова: защемленная пластина, обшивка, изгиб, ребро жесткости, итерационный метод, ряды Фурье, численное исследование.

Key words: clamped plate, sheathing, bending, rib, iteration method, Fourier series, numerical analysis.

ЭЛЕМЕНТЫ обшивки судовых или гидротехнических конструкций, подкрепленные ребрами жесткости, которые дополняют основной силовой набор (стрингеры, шпангоуты, ригели), в основном моделируются как защемленные по контуру прямоугольные пластины со скачками жесткости по линиям ребер (пластины нерегулярной структуры). Это значительно усложняет математическую задачу определения напряженно-деформированного состояния такого элемента по сравнению с «гладкой» пластиной.

Будем рассматривать пластину с одним ребром жесткости, которое делит ее на два равных прямоугольника. Согласно П. Ф. Папковичу [1], можно рассматривать половину пластины с разрезом по оси ребра (рис. 1), которое проходит по линии $y = 1$.

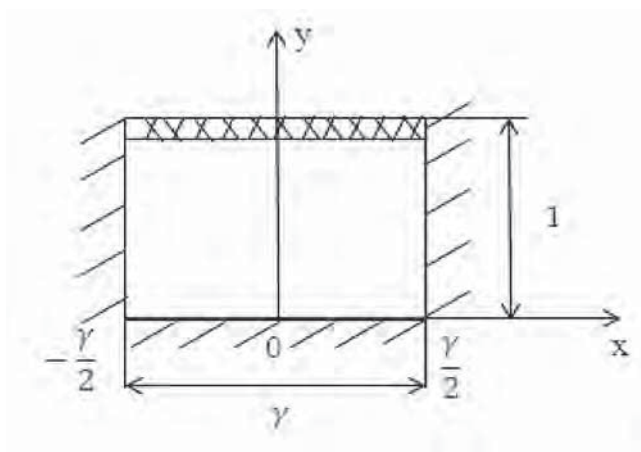


Рис. 1. Половина пластины с разрезом по оси ребра

В безразмерном виде задача ставится так: найти функцию $w(x, y)$ — прогибы пластины, удовлетворяющую [1] дифференциальному уравнению изгиба:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = -1 \quad (1)$$

и граничным условиям:

$$w|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0} = 0; \quad w|_{x=\pm\frac{\gamma}{2}} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=\pm\frac{\gamma}{2}} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}|_{y=1} = 0; \quad V_y^*|_{y=1} = - \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - G \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right]_{y=1} = 0. \quad (3)$$

где ∇^2 — двумерный оператор Лапласа; $w = \frac{W D}{q_0 b^4}$ — относительный прогиб; W — абсолютный

прогиб; q_0 — равномерная поперечная нагрузка; $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость материала пластины; E — модуль Юнга материала пластины; $\gamma = a / b$ — отношение сторон пластины;

ν — коэффициент Пуассона, $G = \frac{1}{2} \frac{E_p I_p}{b D}$ — относительная жесткость половины ребра; E_p — модуль Юнга материала ребра; I_p — момент инерции сечения ребра.

Аналитическое решение этой задачи методом суперпозиции исправляющих функций приведено в работе [2]. Оно имеет вид

$$w(x, y) = -\frac{1}{8} \left(x^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) (y^2 - 2y) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (A_{kn} \operatorname{ch} \lambda_k x + B_{kn} x \operatorname{sh} \lambda_k x) \sin \lambda_k y + \right. \\ \left. + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} [C_{sn} \operatorname{sh} \mu_s (y-1) + D_{sn} \operatorname{ch} \mu_s (y-1) + \right. \\ \left. + E_{sn} (y-1) \operatorname{ch} \mu_s (y-1) + F_{sn} (y-1) \operatorname{sh} \mu_s (y-1)] \cos \mu_s x \right). \quad (4)$$

Здесь обозначено $\lambda_k = k\pi/2$, $\mu_s = \pi s/\gamma$, $\tilde{s} = (s+1)/2$.

Первое слагаемое в (4) есть частное решение уравнения (1), а последующие два ряда представляют собой бигармонические функции с неопределенными коэффициентами.

Частное решение и каждая исправляющая функция в виде ординарного ряда удовлетворяют лишь части граничных условий, то есть порождают и невязки, которые взаимно компенсируются при удовлетворении граничным условиям на двух параллельных кромках с помощью коэффициентов $A_k, \dots, F_s$. Невязки должны убывать с ростом числа итераций n , и в пределе можно получить точное решение. При достижении заданной точности процесс последовательных приближений прекращается.

Приведем выражения основных невязок от многочлена w_0 (первое слагаемое в (4)):

$$\left. \frac{\partial w_0}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right); \quad \left. \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=\pm \frac{\gamma}{2}} = -\frac{\gamma}{8} (y^2 - 2y). \quad (5)$$

Далее они разлагаются в ряды Фурье по косинусам и синусам соответственно, а затем строится итерационный процесс [2–4] исправления невязок на каждом шаге с помощью гиперболических рядов по двум координатам. В силу линейности задачи неопределенные коэффициенты суммируются после каждой итерации и по окончании процесса используются для вычисления прогибов (4), где вместо двойных рядов будут фигурировать внутренние ординарные с этими суммарными коэффициентами.

Приведем сводку формул для вычисления коэффициентов функции прогибов (4) пластины и коэффициентов невязок:

$$B_{kn} = -\frac{b_{k(n-1)}}{\eta_k \operatorname{ch} \frac{\lambda_k \gamma}{2}}; \quad A_{kn} = -\frac{\gamma}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k \gamma}{2} B_{kn}. \\ b_{k0} = \frac{\gamma}{2\lambda_k^3}, \quad \eta_k = \operatorname{th} \frac{\lambda_k \gamma}{2} + \frac{\lambda_k \gamma}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\lambda_k \gamma}{2}, \quad \tilde{B}_{kn} = B_{kn} \operatorname{ch} \frac{\lambda_k \gamma}{2}, \\ b_{kn} = 2 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s^2}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2 \xi_s} \left\{ (-1)^{\tilde{k}} \left[-G \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh} \mu_s} a_{sn} + \frac{1}{\mu_s^2} \left(\operatorname{cth} \mu_s + \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) t_{sn} \right] - \right. \\ \left. - \lambda_k \left[\left(\frac{2}{\mu_s} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) + G \left(\operatorname{cth} \mu_s - \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) \right) a_{sn} - \frac{1}{\mu_s^2 \operatorname{sh} \mu_s} t_{sn} \right] \right\}, \\ a_{s0} = \frac{2}{\gamma \mu_s^3}, \quad a_{sn} = \frac{8}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \tilde{B}_{kn}}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2} \quad (\text{при } n=1 \ a_{s1} = a_{s0} + a_{s1}), \quad \tilde{k} = (k+1)/2, \\ t_{sn} = G \frac{8}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \frac{\lambda_k^3 (\lambda_k^2 + 2\mu_s^2)}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2} \tilde{B}_{kn}, \quad \xi_s = \frac{\operatorname{cth} \mu_s}{\mu_s} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} + \frac{G}{2} \left(1 - \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right),$$

$$C_{sn} = -\frac{1}{2\xi_s} \left[-G \frac{a_{sn}}{\operatorname{sh} \mu_s} + \frac{1}{\mu_s^4} \left(\operatorname{cth} \mu_s + \frac{\mu_s}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) t_{sn} \right],$$

$$D_{sn} = -\frac{1}{2\xi_s} \left[\frac{2a_{sn}}{\mu_s \operatorname{sh} \mu_s} + \frac{1}{\mu_s^4} \left(1 - \frac{\mu_s^2}{\operatorname{sh}^2 \mu_s} \right) t_{sn} \right],$$

$$E_{sn} = -\mu_s C_{sn}, \quad F_{sn} = (1 - \mu_s \operatorname{cth} \mu_s) C_{sn} - D_{sn} \operatorname{cth} \mu_s. \quad (6)$$

Для вычисления критерия сходимости процесса и прогибов пластины, а также для графического представления ее изогнутой поверхности была составлена программа в среде Maple. Число итераций и количество членов в рядах менялось в широких пределах. На печать выводились невязки выполнения граничных условий на каждой итерации.

Для проверки правильности алгоритма и программы определялись прогибы гладкой пластины (полагалось $G = 0$). Форма изогнутой поверхности и максимальное значение прогиба в центре пластины $w(0; 1) = -0,0025329$ полностью совпали с результатами, полученными в работах [5; 6] (прогиб $-0,00254$ и $-0,0025330$ соответственно).

Выражение критерия сходимости было получено из тех соображений, что после каждого шага итерации коэффициенты невязок должны быть меньше, чем были (все значения критерия сходимости по абсолютной величине должны быть меньше единицы).

Здесь мы приведем результаты для пластины с отношением сторон 1:2 (ребро делит пластину на два квадрата).

Было установлено, что процесс сходится для значений относительной жесткости $0 \leq G \leq 0,44$, причем увеличение жесткости ребра ухудшало сходимость процесса при одном и том же количестве членов в рядах. Наличие верхнего предела по жесткости ребра оказалось неожиданным. Предполагалось, что с ростом жесткости ребра до бесконечности будет получено в пределе решение для пластины, защемленной по всем краям (четвертая кромка — линия ребра $y = 1$). При $G > 0,44$ отдельные значения критерия сходимости (который представляет собой бесконечную числовую последовательность) превосходили единицу, но с ростом номера k они стремились к нулю, хотя и медленно. Это дает основание считать, что интервал сходимости является более широким, но вычислительный процесс определения прогибов в нем будет неустойчивым, то есть зависеть от числа членов в рядах и количества итераций.

Надежные результаты имели место для значений относительной жесткости ребра $0 \leq G \leq 0,2$. При $G = 0,1$ величина прогиба в середине ребра составила $w(0; 1) = -0,0020022$. Число членов в рядах последовательно принималось равным $N = 19, 29, 49, 69, 89, 109, 129, 149, 169, 189, 209$. Процесс во всех случаях был сходящимся, однако для совпадения пяти значащих цифр в значениях прогибов двух соседних итераций потребовалось соответственно $n = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60$ шагов итерации. Особо отметим, что для каждой пары значений N и n из указанного списка прогибы в контрольных точках совпадали по пяти значащим цифрам. Это значит, что для получения высокой точности решения достаточно ограничиться наименьшей парой. В данном случае это $N = 19, n = 10$. Заметим также, что при $N < 19$ наблюдалось снижение точности вычисления прогибов.

Помимо получения трехмерного графика функции прогибов (формы изогнутой поверхности пластины), на печать выводились контрольные значения прогибов в отдельных точках сечения $x = 0$. Эти значения сведены в табл. 1 для пятнадцати значений относительной жесткости ребра. Там же указано оптимальное количество членов в рядах и число итераций, при которых эти значения достигались.

Таблица 1

Значения относительных прогибов пластины с отношением сторон 1:2 ($\gamma = 1$) с центральным ребром на линии $y = 1$ для различных значений относительной жесткости ребра и пластины. Прогибы отнесены к величине $\frac{q_0 b^4}{D} 10^{-2}$

G	$w(0; 0,5)$	$w(0; 0,6)$	$w(0; 0,65)$	$w(0; 0,7)$	$w(0; 1)$	N	n
0	0,19171	0,21686	0,22642	0,23422	0,25330	29	10
0,1	0,17796	0,19594	0,20125	0,20441	0,20022	19	10
0,2	0,16900	0,18233	0,18487	0,18500	0,16552	19	15
0,3	0,16269	0,17275	0,17334	0,17134	0,14103	19	25
0,4	0,15803	0,16566	0,16480	0,16122	0,12286	19	40
0,5	0,15442	0,16016	0,15820	0,15340	0,10880	19	60
0,6	0,15155	0,15582	0,15296	0,14720	0,09765	19	90
0,7	0,14922	0,15228	0,14871	0,14216	0,08858	19	160
0,8	0,14729	0,14935	0,14518	0,13798	0,08105	19	500
0,9	0,14560	0,14672	0,14197	0,13418	0,07481	11	100
1,0	0,14421	0,14460	0,13943	0,13170	0,06885	11	150
2,0	0,13664	0,13173	0,12372	0,11261	0,03821	5	120
3,0	0,13353	0,12701	0,11804	0,10588	0,02610	5	150
4,0	0,13184	0,12445	0,11496	0,10223	0,01952	5	300
5,0	0,13080	0,12289	0,11309	0,10000	0,01550	5	1000

Начиная с $G = 0,3$, стала проявляться неустойчивость процесса для больших значений N . Например, при удержании во всех рядах $N = 99$ членов процесс начал медленно расходиться после первых нескольких итераций. Для $G = 0,4$ расходимость проявилась уже при $N = 69$ и т. д.

Это объясняется тем, что невязки на линии ребра в перерезывающих силах имеют медленно сходящийся числовой ряд (см. выражение для t_{sn}), который мажорируется рядом $\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{\lambda_k^2 \ln \lambda_k}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2}$.

Члены этого ряда с ростом индекса k сначала растут, достигают максимума, а уж затем, убывая, стремятся к нулю. Чем больше значение второго индекса s , тем правее и ниже максимум. Поэтому для надежных результатов следует брать не слишком большие значения индексов. Критерием выбора оптимального количества членов рядов является сходимость процесса, то есть убывание невязок выполнения граничных условий. Большое количество членов ряда вызывает накопление погрешностей машинного счета, что, в свою очередь, приводит к неверным результатам. К сожалению, определение оптимального числа членов ряда приходилось делать методом проб, однако этот перебор не занимал много времени.

На рис. 2 показана типовая форма изогнутой поверхности пластины с ребром жесткости при $G = 0,3$ и два ее вида со стороны осей координат.

Графики показывают, что граничные условия для прогибов и углов поворота выполнены точно. Углы поворота всех четырех кромок в поперечном направлении равны нулю.

С ростом относительной толщины увеличивалось и число итераций для достижения заданной точности вычисления прогибов. Из табл. 1 видно, что при $N = 19$ число итераций n для $G = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$ составило соответственно 15, 25, 40, 60, 90, 160, 500.

Заметим, что для больших жесткостей $G = 2; 3; 4; 5$ в рядах удерживалось пять членов, число итераций для достижения заданной точности росло с ростом жесткости; при большем значении числа членов процесс был расходящимся.

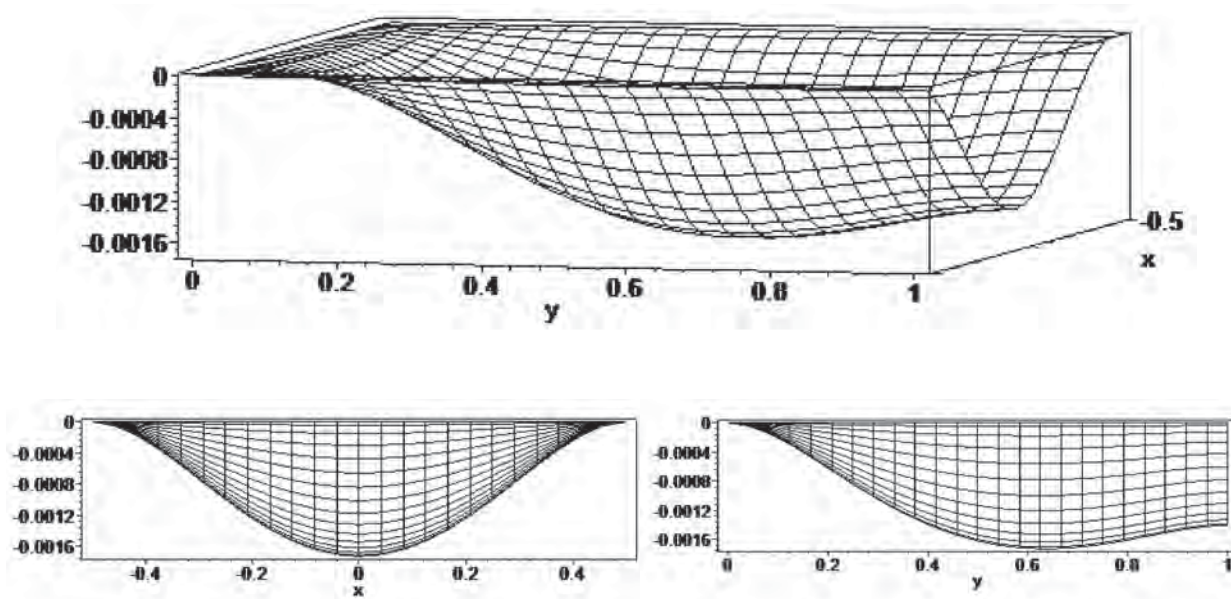


Рис. 2. Форма изогнутой поверхности квадратной пластины, жесткость ребра $G = 0,3$
(в рядах удерживалось 19 членов, число итераций 25)

Приведем форму изогнутой поверхности пластины, ребро которой имеет большую жесткость $G = 5$ (вид сбоку) (рис. 3).

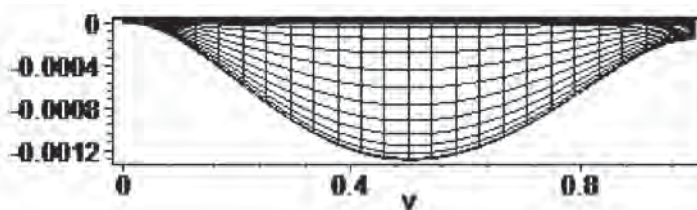


Рис. 3. Форма изогнутой поверхности квадратной пластины, жесткость ребра $G = 5$
(в рядах удерживалось 5 членов, число итераций 1000)

График показывает, что геометрические граничные условия выполнены весьма точно. Невязки по перерезывающим силам на линии ребра также были малы после 1000 итераций. Все это позволяет считать численные результаты достоверными. На рис. 3 видно, что ребро большой жесткости превращается в пределе в заделку. Для сравнения заметим, что прогиб в середине полностью защемленной пластины составляет по данным работ [5; 6] соответственно 0,00126 и 0,0012653, а при жесткости ребра $G = 5$ получено значение 0,0013080, близкое к указанным выше. Это подтверждает правильность стратегии организации вычислительного процесса при больших значениях жесткости ребра.

На рис. 4 представлены формы сечения пластины по оси Oy для различных значений относительной жесткости ребра, которые показывают динамику уменьшения прогибов с ростом указанной жесткости.

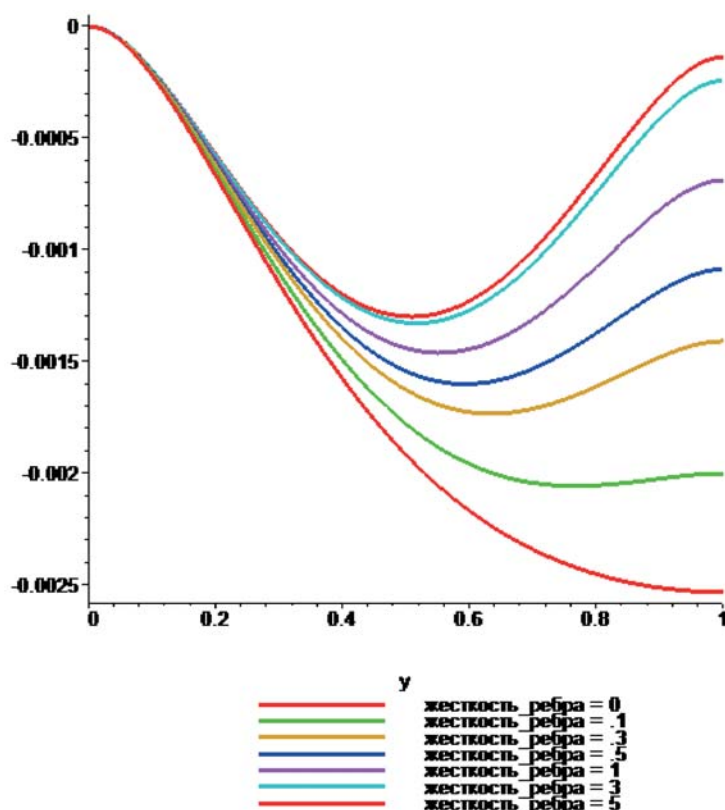


Рис. 4. Формы сечения пластины по оси Oy
для различных значений относительной жесткости ребра

Полученные результаты могут быть использованы в проектно-конструкторских организациях для практических расчетов на изгиб плоских элементов обшивки с ребром жесткости, а также для сравнения с результатами, полученными другими методами, например при тестировании МКЭ.

Список литературы

1. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля / П. Ф. Папкович. — Л.: Судпромгиз, 1941. — Ч. 2. — 960 с.
2. Барышников С. О. Расчет на изгиб прямоугольной панели обшивки с центральным ребром жесткости / М. В. Сухотерин, К. О. Ломтева // Вестник Гос. ун-та морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2013. — № 3.
3. Сухотерин М. В. Оценка действия сосредоточенной силы на обшивку судна / М. В. Сухотерин, К. О. Ломтева // Вестник Гос. ун-та морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2011. — № 1.
4. Барышников С. О. Прочность, устойчивость, колебания плоских элементов судовых конструкций / С. О. Барышников, М. В. Сухотерин. — СПб.: Судостроение, 2012. — 167 с.
5. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1963. — 635 с.
6. Сухотерин М. В. Математическое моделирование упругих плоских элементов судовых и гидротехнических конструкций: дис. ... д-ра техн. наук / М. В. Сухотерин. — СПб.: СПГУВК, 2009. — 300 с.