

СУДОСТРОЕНИЕ И СУДОРЕМОНТ

УДК 519.63:539.384:629.12

М. В. Сухотерин,
д-р техн. наук, профессор,
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова;

Е. В. Потехина,
доцент,
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова;

А. В. Анненков,
аспирант,
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК И ФОРМ РАВНОВЕСИЯ СЖАТЫХ ПАНЕЛЕЙ ОБШИВКИ КОРПУСА СУДНА

DETERMINATION OF THE SPECTRUM OF CRITICAL LOADS AND FORMS BALANCE COMPRESSED CLADDING PANELS HULL

Защемленная по контуру прямоугольная панель обшивки сжимается в ее плоскости равномерно распределенной нагрузкой, приложенной ко всем граням. Аналитическое решение построено для четырех закритических форм равновесия: симметричной, антисимметричной и двух их комбинаций. Каждое решение выбирается в виде суммы двух гиперболо-тригонометрических рядов по двум координатам. Проблема сводится к бесконечной однородной системе относительно коэффициентов рядов. Приводятся численные результаты нахождения критических нагрузок. Графически представлены найденные формы равновесия.

Clamped on a contour of a rectangular casing panel is compressed in its plane uniformly distributed load applied to each face. The analytical solution is constructed for four supercritical forms of equilibrium: symmetric, antisymmetric, and two of their combinations. Each solution is chosen as a sum of two hyperbolic-trigonometric series by two coordinates. The problem is reduced to an infinite homogeneous system, relative to the coefficients of the series. Numerical results of critical loads. Graphically presents found forms of equilibrium.

Ключевые слова: прямоугольная защемленная пластина, устойчивость, гиперболо-тригонометрические ряды, критические нагрузки, формы равновесия.

Key words: rectangular clamped plate, stability, hyperbolic-trigonometric series, critical value, forms of equilibrium.

1. Анализ проблемы. Физическая и математическая модель задачи. Сжимающие усилия, передающиеся на обшивку от других элементов конструкции через силовой набор, если они достаточно велики, могут привести к потере устойчивости панели обшивки, что, в свою очередь, часто приводит к разрушению этого элемента, а возможно, и всей конструкции. Поэтому определение критических сжимающих нагрузок является важной частью расчета на прочность обшивки, палубных настилов, переборок и т. п.

В работе [1, с. 51–58] получено симметричное решение задачи устойчивости прямоугольной панели, защемленной по всем граням. Это позволило найти первую критическую нагрузку (эйлерову) и несколько последующих, а также формы равновесных состояний после прохождения критических нагрузок. Подробно исследована квадратная пластина. Однако при симметричной сжимающей нагрузке формы устойчивого равновесия могут быть не только симметричными относительно осей координат, но и антисимметричными, а также симметричными относительно одной оси и антисимметричными по другой. Поэтому дополнительно должны быть получены и исследованы нечетное, четно-нечетное и нечетно-четное решения.

Пусть пластина с размерами $a \times b$ в плане постоянной толщины h нагружена равномерно распределенными сжимающими усилиями T_x, T_y , приложенными к ее граням. Начало системы координат поместим в центр пластины.

Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины в безразмерных координатах $x = X/b, y = Y/b$ имеет вид [2]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где w — прогиб срединной поверхности пластины; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; $T_x = \frac{b^2}{D} T_x$, $T_y = \frac{b^2}{D} T_y$ — относительные сжимающие усилия.

Относительные размеры пластины будут такими: $-\gamma/2 \leq x \leq \gamma/2, -1/2 \leq y \leq 1/2$, где $\gamma = a/b$ — отношение сторон.

Граничные условия имеют вид [3]:

$$w = 0, w'_x = 0 \text{ при } x = \pm\gamma/2, \quad (2)$$

$$w = 0, w'_y = 0 \text{ при } y = \pm 1/2. \quad (3)$$

Таким образом, математическая модель задачи представлена уравнениями (1)–(3). Задача ставится так:

1) найти выражение функции прогибов $w(x, y)$, удовлетворяющее уравнению (1) и граничным условиям (2), (3);

2) найти значения сжимающих усилий T_x и T_y (критические значения), при которых пластина теряет устойчивость, а затем приобретает новую форму устойчивого равновесия.

В общем случае имеется бесконечный ряд таких значений и форм. Практика показывает, что в некоторых случаях (при быстром нагружении или при наличии конструктивных ограничителей) разрушения при первой критической нагрузке (эйлеровой) не происходит; пластина приобретает новую устойчивую форму равновесия и способна в дальнейшем выдерживать более высокие нагрузки, хотя при этом имеет значительные деформации. Поэтому важно знать и вторую критическую нагрузку. С математической точки зрения интересно получить некоторый спектр критических нагрузок, и эти результаты могут быть востребованы в будущем при появлении новых материалов или при особых условиях эксплуатации, например при высоких или низких температурах и т. п.

Задача устойчивости защемленной по всему контуру прямоугольной пластины не имеет решения в замкнутой форме. Трудность состоит в удовлетворении граничным условиям отсутствия углов поворота заделанных кромок. Поэтому некоторые исследователи ограничивались лишь первым приближением, и проблема состоит в том, чтобы получить более достоверные численные результаты.

2. Построение решения. Задачу будем решать методом, описанным в [4], с помощью гиперболо-тригонометрических рядов по двум координатам.

Четное решение. Четное (симметричное) решение задачи (1)–(3) выбираем в виде суммы двух функций [1]:

$$w_{11}(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} (A_{k1} \operatorname{ch} \alpha_k x + B_{k1} \operatorname{ch} \beta_k x) \cos \lambda_k y, \quad (4)$$

$$w_{21}(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} (C_{s1} \operatorname{ch} \xi_s y + D_{s1} \operatorname{ch} \eta_s y) \cos \mu_s x, \quad (5)$$

где $\lambda_k = k\pi, \mu_s = s\pi/\gamma, \tilde{k} = (k+2)/2, \tilde{s} = (s+1)/2, A_{k1}, B_{k1}, \alpha_k, \beta_k, C_{s1}, D_{s1}, \xi_s, \eta_s$ — неопределенные коэффициенты.

Потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли дифференциальному уравнению (1). Тогда получим:

$$\alpha_k, \beta_k = \sqrt{0,5 \left[2\lambda_k^2 - T_x \pm \sqrt{4\lambda_k^2(T_y - T_x) + T_x^2} \right]}, \quad (6)$$

$$\xi_s, \eta_s = \sqrt{0,5 \left[2\mu_s^2 - T_y \pm \sqrt{4\mu_s^2(T_x - T_y) + T_y^2} \right]}, \quad (7)$$

Знак «+» перед внутренним радикалом относится к первому коэффициенту в левой части, а «-» — ко второму.

Заметим, что эти корни могут быть как действительными, так и комплексными.

Функции (4), (5) «автоматически» удовлетворяют условиям отсутствия прогибов лишь двух граней $y = \pm 1/2$ или $x = \pm \gamma/2$. Потребуем, чтобы прогибы были нулевыми и на двух других. Тогда коэффициенты B_{k1} и A_{k1} , а также D_{s1} и C_{s1} будут связаны соотношениями:

$$A_{k1} = -B_{k1} \operatorname{ch} \beta_k^* / \operatorname{ch} \alpha_k^*, \quad C_{s1} = -D_{s1} \operatorname{ch} \eta_s^* / \operatorname{ch} \xi_s^*, \quad (8)$$

где

$$\alpha_k^* = \alpha_k \gamma / 2, \quad \beta_k^* = \beta_k \gamma / 2, \quad \xi_s^* = \xi_s / 2, \quad \eta_s^* = \eta_s / 2.$$

Потребуем теперь, чтобы искомое решение, то есть сумма функций w_{11} и w_{21} , удовлетворяли условию отсутствия углов поворота заделанных сечений (вторые условия (2), (3)). Это дает систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k A_{k1} \operatorname{ch} \alpha_k^* (\alpha_k \operatorname{th} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{th} \beta_k^*) \cos \lambda_k y + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s C_{s1} \left(\operatorname{ch} \xi_s y - \frac{\operatorname{ch} \xi_s^*}{\operatorname{ch} \eta_s^*} \operatorname{ch} \eta_s y \right) = 0, \\ \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k A_{k1} \left(\operatorname{ch} \alpha_k x - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k^*}{\operatorname{ch} \beta_k^*} \operatorname{ch} \beta_k x \right) + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s C_{s1} \operatorname{ch} \xi_s^* (\xi_s \operatorname{th} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{th} \eta_s^*) \cos \mu_s x = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Разложим гиперболические функции, входящие в (9), в ряды Фурье по косинусам и, переставляя знаки суммирования, после преобразований приведем систему к виду:

$$\begin{cases} A_{k1}^* (\alpha_k \operatorname{th} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{th} \beta_k^*) - 4\lambda_k \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s C_{s1}^* \frac{\eta_s^2 - \xi_s^2}{(\xi_s^2 + \lambda_k^2)(\eta_s^2 + \lambda_k^2)} = 0, \\ -\frac{4}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k A_{k1}^* \frac{\beta_k^2 - \alpha_k^2}{(\alpha_k^2 + \mu_s^2)(\beta_k^2 + \mu_s^2)} + C_{s1}^* (\xi_s \operatorname{th} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{th} \eta_s^*) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $A_{k1}^* = A_{k1} \operatorname{ch} \alpha_k^*$, $C_{s1}^* = C_{s1} \operatorname{ch} \xi_s^*$.

Разрешая второе уравнение системы относительно коэффициентов C_{s1}^* и подставляя их в первое уравнение, получим систему для одной последовательности коэффициентов:

$$a_{k1} = \frac{16}{\gamma} \frac{\lambda_k^2}{\varphi_{k1}} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s^2 \sqrt{4\mu_s^2(T_x - T_y) + T_y^2}}{\theta_{s1} (\xi_s^2 + \lambda_k^2)(\eta_s^2 + \lambda_k^2)} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sqrt{4\lambda_m^2(T_y - T_x) + T_x^2}}{(\alpha_m^2 + \mu_s^2)(\beta_m^2 + \mu_s^2)} a_{m1}, \quad (11)$$

где

$$a_{k1} = A_{k1}^* \lambda_k = A_{k1} \lambda_k \operatorname{ch} \alpha_k^*, \quad \varphi_{k1} = \alpha_k \operatorname{th} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{th} \beta_k^*, \quad \theta_{s1} = \xi_s \operatorname{th} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{th} \eta_s^*.$$

Здесь, чтобы не путать индексы, во внутренней сумме поставлен индекс m вместо k .

Система (11) представляет собой бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно последовательности коэффициентов a_{k1} .

Если пластина устойчива при данных значениях сжимающих усилий T_x и T_y , то для любых отличных от нуля начальных значений коэффициентов a_{k1} процесс последовательных приближе-

ний, организованный по формуле (11), приведет к тривиальному решению. Форма пластины останется плоской, если усилия значительно меньше эйлеровых. С ростом усилий начнет появляться зона неустойчивого состояния, когда коэффициенты α_k начнут расти. Расчеты показали, что зона неустойчивого состояния, сопровождающаяся ростом прогибов пластины, может быть достаточно протяженной и включать в себя критическую нагрузку, дающую резкий неограниченный рост прогибов пластины. В зоне неустойчивого состояния система (11) дает расходящееся решение с меньшей или большей скоростью.

Нечетное решение. Для антисимметричных форм изогнутой поверхности обе функции прогибов будут содержать лишь нечетные функции по обеим координатам:

$$w_{12}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (A_{k2} \operatorname{sh} \alpha_k x + B_{k2} \operatorname{sh} \beta_k x) \sin \lambda_k y, \quad (12)$$

$$w_{22}(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s (C_{s2} \operatorname{sh} \xi_s y + D_{s2} \operatorname{sh} \eta_s y) \sin \mu_s x, \quad (13)$$

где $\lambda_k = 2\pi k$, $\mu_s = 2\pi s/\gamma$, а коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \xi_s, \eta_s$ имеют тот же вид (6), (7).

Удовлетворяя всем граничным условиям задачи, придем к аналогичной (11) бесконечной системе:

$$a_{k2} = \frac{16}{\gamma} \frac{\lambda_k^2}{\varphi_{k2}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_s^2 \sqrt{4\mu_s^2 (T_x - T_y) + T_y^2}}{\theta_{s2} (\xi_s^2 + \lambda_k^2) (\eta_s^2 + \lambda_k^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4\lambda_m^2 (T_y - T_x) + T_x^2}}{(\alpha_m^2 + \mu_s^2) (\beta_m^2 + \mu_s^2)} a_{m2}, \quad (14)$$

где

$$a_{k2} = A_{k2} \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k^*, \quad \varphi_{k2} = \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{cth} \beta_k^*, \quad \theta_{s2} = \xi_s \operatorname{cth} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{cth} \eta_s^*.$$

Нечетно-четное решение. Форма изогнутой поверхности может быть антисимметричной относительно одной оси и симметричной по другой. Тогда

$$w_{13}(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k (A_{k3} \operatorname{sh} \alpha_k x + B_{k3} \operatorname{sh} \beta_k x) \cos \lambda_k y, \quad (15)$$

$$w_{23}(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s (C_{s3} \operatorname{ch} \xi_s y + D_{s3} \operatorname{ch} \eta_s y) \sin \mu_s x, \quad (16)$$

где $\lambda_k = \pi k$, $\mu_s = 2\pi s/\gamma$.

Разрешающая система:

$$a_{k3} = \frac{16}{\gamma} \frac{\lambda_k^2}{\varphi_{k3}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_s^2 \sqrt{4\mu_s^2 (T_x - T_y) + T_y^2}}{\theta_{s3} (\xi_s^2 + \lambda_k^2) (\eta_s^2 + \lambda_k^2)} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sqrt{4\lambda_m^2 (T_y - T_x) + T_x^2}}{(\alpha_m^2 + \mu_s^2) (\beta_m^2 + \mu_s^2)} a_{m3}, \quad (17)$$

где

$$a_{k3} = A_{k3} \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k^*, \quad \varphi_{k3} = \alpha_k \operatorname{th} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{th} \beta_k^*, \quad \theta_{s3} = \xi_s \operatorname{cth} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{cth} \eta_s^*.$$

Четно-нечетное решение. Аналогично:

$$w_{14}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (A_{k4} \operatorname{ch} \alpha_k x + B_{k4} \operatorname{ch} \beta_k x) \sin \lambda_k y, \quad (18)$$

$$w_{24}(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s (C_{s4} \operatorname{sh} \xi_s y + D_{s4} \operatorname{sh} \eta_s y) \cos \mu_s x, \quad (19)$$

где $\lambda_k = 2\pi k$, $\mu_s = \pi s/\gamma$.

Разрешающая система:

$$a_{k4} = \frac{16}{\gamma} \frac{\lambda_k^2}{\varphi_{k4}} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s^2 \sqrt{4\mu_s^2 (T_x - T_y) + T_y^2}}{\theta_{s4} (\xi_s^2 + \lambda_k^2) (\eta_s^2 + \lambda_k^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4\lambda_m^2 (T_y - T_x) + T_x^2}}{(\alpha_m^2 + \mu_s^2) (\beta_m^2 + \mu_s^2)} a_{m4}, \quad (20)$$

где

$$a_{k4} = A_{k4} \lambda_k \operatorname{ch} \alpha_k^*, \quad \varphi_{k4} = \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{cth} \beta_k^*, \quad \theta_{s4} = \xi_s \operatorname{th} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{th} \eta_s^*.$$

3. Численные результаты. Здесь представлены численные результаты для случая, когда с обеих сторон действуют одинаковые сжимающие усилия $T_x = T_y = T$. При этом

$$\alpha_k = \lambda_k, \quad \beta_k = \sqrt{\lambda_k^2 - T}, \quad \xi_s = \mu_s, \quad \eta_s = \sqrt{\mu_s^2 - T}.$$

и системы (11), (14), (17), (20) можно записать в виде одного выражения:

$$a_{ki} = \frac{16T^2}{\gamma} \frac{\lambda_k^2}{\varphi_{ki}} \sum_{si} \frac{\mu_s^2}{\theta_{si} (\mu_s^2 + \lambda_k^2) (\mu_s^2 + \lambda_k^2 - T)} \sum_{mi} \frac{a_{mi}}{(\lambda_m^2 + \mu_s^2) (\lambda_m^2 + \mu_s^2 - T)}, \quad (21)$$

где $i = 1, 2, 3, 4$.

Четное решение:

$$i = 1, \quad A_{k1} = a_{k1} / (\lambda_k \operatorname{ch} \alpha_k^*)$$

$$\lambda_k = \pi k \quad (k = 1, 3, \dots), \quad \varphi_k = \alpha_k \operatorname{th} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{th} \beta_k^*,$$

$$\mu_s = \pi s / \gamma \quad (s = 1, 3, \dots), \quad \theta_s = \xi_s \operatorname{th} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{th} \eta_s^*.$$

Нечетное решение:

$$i = 2, \quad A_{k2} = a_{k2} / (\lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k^*)$$

$$\lambda_k = 2\pi k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \varphi_k = \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{cth} \beta_k^*,$$

$$\mu_s = 2\pi s / \gamma \quad (s = 1, 2, \dots), \quad \theta_s = \xi_s \operatorname{cth} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{cth} \eta_s^*.$$

Нечетно-четное решение:

$$i = 3, \quad A_{k3} = a_{k3} / (\lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k^*)$$

$$\lambda_k = \pi k \quad (k = 1, 3, \dots), \quad \varphi_k = \alpha_k \operatorname{th} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{th} \beta_k^*,$$

$$\mu_s = 2\pi s / \gamma \quad (s = 1, 2, \dots), \quad \theta_s = \xi_s \operatorname{cth} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{cth} \eta_s^*.$$

Четно-нечетное решение:

$$i = 4, \quad A_{k4} = a_{k4} / (\lambda_k \operatorname{ch} \alpha_k^*)$$

$$\lambda_k = 2\pi k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \varphi_k = \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{cth} \beta_k^*,$$

$$\mu_s = \pi s / \gamma \quad (s = 1, 3, \dots), \quad \theta_s = \xi_s \operatorname{th} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{th} \eta_s^*. \quad (22)$$

Для вычислительного процесса была составлена программа в системе аналитических вычислений Maple. В расчетах рассматривались пластины с отношением сторон $\gamma = 1$ (квадратная), 1,5 и 2. Величина сжимающих усилий менялась в широких пределах. Для каждого значения T сначала все коэффициенты a_m полагались равными единице (нулевое приближение). По формуле (21) вычислялись коэффициенты a_k (первое приближение). Затем эти коэффициенты подставлялись в правую часть системы (21) и вычислялись коэффициенты второго приближения и т. д. Для качественного анализа итерационная процедура выполнялась от 20 до 30 раз. Число членов в рядах принималось равным 59 (это число является и размером укороченной системы (21)). Дальнейшее увеличение этого числа практически не влияло на точность вычислений (совпадение до шестого знака). На печать выводились все коэффициенты для каждой итерации. Время вычисления для каждого значения T составляло 1–2 мин, поэтому интервалы устойчивого и неустойчивого состояния, критические усилия находились достаточно быстро простым перебором значений T с учетом поведения коэффициентов a_k по итерациям.

Если при данном значении нагрузки наблюдалось уменьшение абсолютных значений коэффициентов a_k с ростом числа итераций, то есть в пределе получалось тривиальное решение, то это означало, что пластина устойчива. Эти нагрузки образовывали некоторые интервалы — интервалы устойчивого состояния.

Если же коэффициенты росли, то это означало, что пластина находится в неустойчивом состоянии. Соответствующие значения нагрузки образовывали интервалы неустойчивого состояния. В принципе при любой нагрузке из этого интервала пластина может потерять устойчивость, однако вблизи концов интервала это маловероятно хотя бы из-за наличия сил внутреннего трения. В качестве критических значений принимались те, при которых коэффициенты наиболее быстро устремлялись к бесконечности при одном и том же числе итераций.

Значения нагрузки, при которых получалось нетривиальное конечное решение, то есть, начиная с некоторой итерации, все соответствующие коэффициенты совпадали, принимались в качестве равновесных значений, а полученные при этом формы изогнутой поверхности пластины представляли собой формы ее равновесия. Были получены трехмерные изображения этих форм, где визуально можно было убедиться в строгом выполнении граничных условий.

Помимо критических и равновесных значений, существуют и особые значения нагрузки. Особые значения, при которых $T = \lambda_k^2 + \mu_s^2$ и знаменатель формулы (21) обращается в нуль, имеют место из-за того, что искомое решение представлялось в виде суммы двух гиперголо-тригонометрических рядов по двум координатам (4, 5) и им подобных, каждый из которых моделирует свободно опертые параллельные кромки. Поэтому в решении для защемленной по всему контуру пластины «сидит» и критическое состояние для свободно опертой пластины, являясь, как показали исследования, лишь началом зоны неустойчивого состояния защемленной пластины.

В табл. 1 приведены несколько первых критических нагрузок для пластин с различным отношением сторон и указаны соответствующие формы решения, при которых они получены. Самая первая из них — эйлерова нагрузка. В работе [1] дается сравнение эйлеровых нагрузок, полученных другими авторами для квадратной пластины, со значением 37,8 (см. табл. 1).

Следует отметить, что в спектре критических нагрузок имеются совпадающие значения для различных отношений сторон. В табл. 1 они выделены одинаковым цветом.

Таблица 1

Критические усилия равномерного сжатия при различных формах потери устойчивости прямоугольных пластин, защемленных по контуру, с отношением сторон 1, 1,5 и 2

Диапазон усилий $T = T_x = T_y$	$\gamma = 1$		$\gamma = 1,5$		$\gamma = 2$	
	$T_{кр.}$	Форма решения	$T_{кр.}$	Форма решения	$T_{кр.}$	Форма решения
11–20	—	—	19,835	четная	14,617	четная
21–30	—	—	—	—	26,28	нечетно-четная
31–40	37,8	четная	—	—	37,8	нечетно-четная
41–50	—	—	41,537 46,351	нечетно-четная четно-нечетная	44,629	четная
51–60	58,47	нечетно-четная	58,47	четная	52,949 58,47	нечетная нечетно-четная
61–70	—	—	65,463	нечетная	68,905	четно-нечетная
71–80	—	—	—	—	78,541	четная
81–90	85,081	нечетно-четная	86,512	нечетно-четная	85,081	нечетная
91–100	—	—	94,735 94,875	четная четно-нечетная	92,521	четно-нечетная

Таблица 1
(Окончание)

101–110	104,289 105,119	четная нечетная	105,119	четно-нечетная	105,119	нечетная
111–120	—	—	112,049	нечетно-четная	116,054 117,007	четная четно-нечетная
121–140	—	—	133,682	нечетная	...	...
141–150	147,291	нечетно-четная	...	...		
151–160	156,25	четная				
161–220	211,795	нечетная				
...	...	...				

В табл. 2 приведены нагрузки, при которых пластина переходит в новое состояние равновесия после прохождения одной из критических нагрузок. При этих значениях коэффициенты a_k бесконечной системы (21), которые находятся из соответствующей укороченной системы методом последовательных приближений, сходятся к нетривиальным значениям. После 20-й итерации соответствующие коэффициенты практически не отличались друг от друга.

Таблица 2

**Равновесные сжимающие усилия и типы форм равновесия
прямоугольных пластин, защемленных по контуру, с отношением сторон 1, 1,5 и 2**

Диапазон усилий $T = T_x = T_y$	$\gamma = 1$		$\gamma = 1,5$		$\gamma = 2$	
	$T_{рв}$	Форма равновесия	$T_{рв}$	Форма равновесия	$T_{рв}$	Форма равновесия
40–50	—	—	40,675	четная	42,547	нечетно-четная
50–60	52,345	четная	53,162	нечетно-четная	54,679	четная
70–80	—	—	79,735	четная	—	—
80–90	—	—	—	—	82,289	четно-нечетная
90–100	92,125	нечетно-четная	96,198	нечетная	98,690	четная
120–130	128,21	нечетная	...	...	...	...
160–170	167,03	четная				
...	...	...				

На рис. 1–4 представлены первые четыре формы равновесного состояния квадратной пластины, равномерно сжатой с четырех сторон.

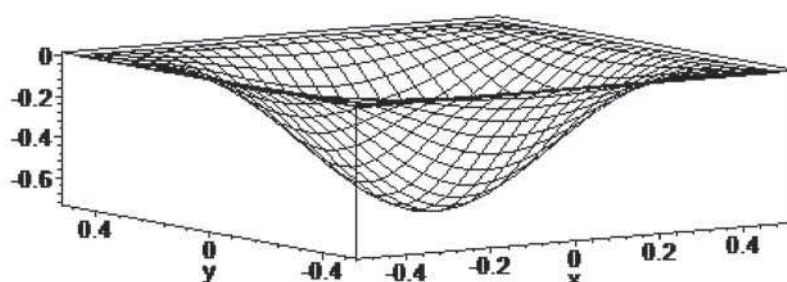


Рис. 1. Четная форма равновесия квадратной пластины при $T_{рв} = 52,345$

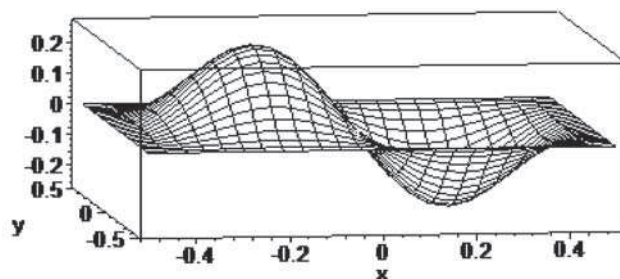


Рис. 2. Нечетно-четная форма равновесия квадратной пластины при $T_{рв} = 92,125$

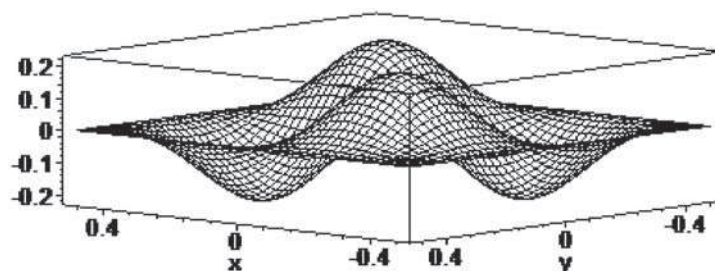


Рис. 3. Нечетная форма равновесия квадратной пластины при $T_{рв} = 128,21$

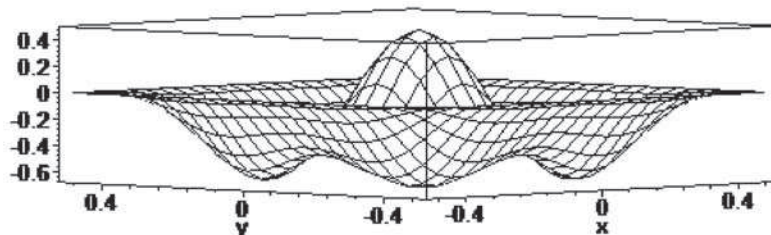


Рис. 4. Четная форма равновесия квадратной пластины при $T_{рв} = 167,03$

4. Выводы. Полученное решение позволяет с высокой точностью найти критические сжимающие нагрузки при различных сочетаниях T_x и T_y для защемленных прямоугольных пластин, а также определить закритические формы равновесия. Алгоритм вычислений и численные результаты могут быть использованы в практических расчетах на устойчивость элементов обшивки судовых и гидротехнических конструкций.

Список литературы

1. Сухотерин М. В. Устойчивость сжатых панелей обшивки судна / М. В. Сухотерин, Т. П. Кныш, Л. В. Анненков // Вестник ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова. — 2013. — Вып. 2 (18).
2. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля / П. Ф. Папкович. — Л.: Судпромгиз, 1941. — Ч. 2. — 960 с.
3. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Физматгиз, 1963. — 635 с.
4. Барышников С. О. Прочность, устойчивость, колебания плоских элементов судовых конструкций / С. О. Барышников, М. В. Сухотерин. — СПб.: Судостроение, 2012. — 167 с.