

Список литературы

1. *Воробьев Ю. Л.* Предупреждение и ликвидация аварийных разливов нефти и нефтепродуктов / Ю. Л. Воробьев, В. А. Акимов, Ю. И. Соколов. — М.: Ин-октаво, 2005. — 368 с.
2. Постановление Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору от 20 декабря 2005 г. N 16 «Об утверждении и введении в действие федеральных норм и правил в области использования атомной энергии «Учет внешних воздействий природного и техногенного происхождения на объекты использования атомной энергии». [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://base.consultant.ru/cons/>, свободный. — Загл. с экрана.
3. *Наумов В. С.* Оценка ущерба при разливах нефти на объектах транспортного комплекса / В. С. Наумов, А. Е. Пластинин // Журнал университета водных коммуникаций. — 2010. — № 1. — С. 152–157.
4. *Пластинин А. Е.* Особенности оценки ущерба при разливах нефти на внутренних водных путях / А. Е. Пластинин, А. Н. Каленков // Приволжский научный журнал. — 2011. — № 3. — С. 168–174.
5. *Наумов В. С.* Моделирование процессов ликвидации разливов нефти с судов / В. С. Наумов, А. Е. Пластинин // Речной транспорт (XXI век). — 2014. — № 3. — С. 65–70.
6. *Наумов В. С.* Организация контроля потенциально-опасных объектов судоходства / В. С. Наумов, А. Е. Пластинин. Журнал университета водных коммуникаций. — 2010. — № 4. — С. 92–97.
7. *Наумов В. С.* Проблема защиты экологически чувствительных территорий при разливах нефти на внутренних водных путях / В. С. Наумов, А. Е. Пластинин, О. С. Нестерова // Журнал университета водных коммуникаций. — 2013. — № 3(19). — С. 130–135.
8. *Наумов В. С.* Управление кризисными ситуациями природного и техногенного характера. Учебное пособие / В. С. Наумов, А. Е. Пластинин. — Н. Новгород: Изд-во ФГОУ ВПО «ВГАВТ», 2009. — 208 с.
9. *Елисеева, И. И., Юзбашев М. М.* Общая теория статистики: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 656 с.
10. Руководство по анализу опасности аварийных взрывов и определению параметров их механического действия. РБ Г-05-039-96 (утв. Постановлением Госатомнадзора России 31 декабря 1996 г. № 100). [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://docs.cntd.ru/document/1200061429>, свободный. — Загл. с экрана.

УДК 539.3:[624.044.2]

Г. Н. Ширунов,
канд. техн. наук, доц.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НОРМАЛЬНОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ

MODELING NORMAL CONCENTRATED FORCE IN THE PROBLEM LINEARLY DEFORMABLE FOUNDATION OF HYDRAULIC ENGINEERING STRUCTURE

Методом начальных функций (МНФ) решена трехмерная задача сжатия изотропного слоя нормальной сосредоточенной силой. Функция сосредоточенной силы описывается рядами Фурье с удержанием конечного количества членов. Рассмотрение достаточно большой толщины слоя и выделение из него области в виде параллелепипеда больших размеров может трактоваться как модель упругого полупространства. Численно-аналитическое решение позволяет определять компоненты напряженно-деформируемого состояния (НДС) грунтового основания, свойства которого принимаются линейно-упругими. Приводится сравнение полученных результатов с известными формулами задачи Буссинеска и Лява. Расчеты выполнены с использованием программы, разработанной на основе комплекса символьных вычислений Maple.

Three-dimensional problem of elasticity theory of isotropic body about compression layer by the normal concentrated force, is solved by the method of initial functions (MIF). Function point force is described by the Fourier series with retention of a finite number of terms of the series. The appointment of a sufficiently large thickness of the layer and the allocation from there of a parallelepiped form region also large sizes can be interpreted as the model of an elastic half-space. Numerical-analytical solution allows to define the components of the stress-deformed state of the soil Foundation with linearly elastic properties are accepted. Comparison of the obtained results with the known formulas tasks Boussinesq and Love. The implementation of the mathematical model calculations performed using the developed program on the basis of a complex symbolic computation Maple.

Ключевые слова: теория упругости, упругое полупространство, метод начальных функций, численно-аналитическое решение.

Key words: theory of elasticity, elastic half-space, the method of initial functions, numerical-analytical solution.

Введение

Решение задачи о воздействии сосредоточенной силы на упругий слой или полупространство широко применяется в многочисленных практических приложениях: расчет оснований фундаментов, несущего покрытия от воздействия транспортного оборудования и др. В практике гидротехнического строительства часто встречаются задачи передачи сосредоточенных нагрузок, речь идет о судоходных шлюзах, грузоподъемных подвижных и неподвижных погрузчиках в портах, перегрузочных механизмах, где нагрузка на основание передается на ограниченном участке.

Хотя на практике не существует силового воздействия на тело, передающегося в точке, однако такая абстракция расчетной схемы успешно используется для разных моделей. Определяются перемещения, интегральные силовые факторы — моменты и поперечные силы в балках, пластинках и других элементах строительных конструкций. В двумерных и пространственных задачах теории упругости (ТУ) получаемые решения (в точке приложения силы), имеют как самостоятельное значение вне этой зоны, так и используются в качестве промежуточного результата. Примером является задача Буссинеска. На основании принципа суперпозиции решения для сосредоточенных сил, приложенных в разных точках границы полупространства, складываются, таким образом решается задача о нагружении части границы. В механике грунтов она используется в виде формул Лява и применяется в практических расчетах грунтовых оснований фундаментов.

В работах [1], [2] методом начальных функций (МНФ) получено решение для параллелепипеда, выделенного из бесконечного периодически нагруженного линейно-деформируемого слоя, где в центре верхней грани на квадратной площадке приложена сжимающая, равномерно распределенная нагрузка. Реализация такого рода решений для быстроменяющейся функции нагрузки стала возможна в связи с широким внедрением в расчетную практику системы аналитических вычислений Maple [3]–[10], позволяющей производить вычисления с мантисой произвольной длины. Функция нагрузки описывается с помощью рядов Фурье.

В данной работе решается задача о нагружении параллелепипеда сосредоточенной сжимающей силой. Удержание в ряде Фурье того или иного количества членов позволяет приближенно моделировать локальное воздействие нагрузки, распределенной на ограниченной площадке, размеры которой уменьшаются с ростом числа удерживаемых членов.

Постановка задачи

Основное соотношение МНФ записывается в виде:

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{U}^0, \quad (1)$$

где \mathbf{U} — вектор компонентов напряженно-деформированного состояния:

$$\mathbf{U} = \{u, v, w, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\};$$

\mathbf{U}^0 — вектор начальных функций, определенных на начальной плоскости при $z = 0$:

$$\mathbf{U}^0 = \{u^0, v^0, w^0, \sigma_z^0, \tau_{yz}^0, \tau_{xz}^0\};$$

\mathbf{L} — матрица операторов МНФ, представляющих комбинации гиперболических функций синусов и косинусов.

Вектор начальных функций, представленный следующим образом:

$$\mathbf{U}_{mn}^0 = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^0 \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zmn}^0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{yzmn}^0 \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{xzm}^0 \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\alpha_m = \frac{m\pi}{l_x}, \beta_n = \frac{n\pi}{l_y}$ дает решение в «синусах».

Результат воздействия операторов матрицы \mathbf{L} на начальные функции является значениями операторов $\bar{L}_{ij}, i = 1, \dots, 9, j = 1, \dots, 6$, полученных ранее в работах [11], [12].

На начальной плоскости — верхней грани параллелепипеда — при $z = 0$ приняты следующие граничные условия: $\tau_{yz}^0 = 0, \tau_{xz}^0 = 0, \sigma_z^0 = q(x, y)$. На нижней грани при $z = h$ приняты условия отсутствия перемещений: $u(x, y, h) = 0, v(x, y, h) = 0, w(x, y, h) = 0$.

Используя основное соотношение МНФ (1), записываем систему уравнений, удовлетворяющих граничным условиям на грани $z = h$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_{11}(h)u^0 + \bar{L}_{12}(h)v^0 + \bar{L}_{13}(h)w^0 + \bar{L}_{14}(h)\sigma_z^0 &= 0 \\ \bar{L}_{21}(h)u^0 + \bar{L}_{22}(h)v^0 + \bar{L}_{23}(h)w^0 + \bar{L}_{24}(h)\sigma_z^0 &= 0 \\ \bar{L}_{31}(h)u^0 + \bar{L}_{32}(h)v^0 + \bar{L}_{33}(h)w^0 + \bar{L}_{34}(h)\sigma_z^0 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Для каждой гармоники двойного тригонометрического ряда Фурье, представляющего функцию нагрузки $\sigma_z^0 = P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$, решается неоднородная система алгебраических уравнений вида (3) относительно неизвестных коэффициентов разложения начальных функций u_{mn}^0, v_{mn}^0 и w_{mn}^0 . Все компоненты НДС находятся из основного соотношения (1) с представлением найденных начальных функций в виде рядов Фурье.

Рассчитывается параллелепипед высотой $h = 12$ м с размерами в плане $l_x = l_y = 12$ м под действием сосредоточенной силы $P = 100$ кН, приложенной в центре верхней грани начальной плоскости $z = 0$ (рис. 1). Модуль упругости материала принят $E = 20$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$.

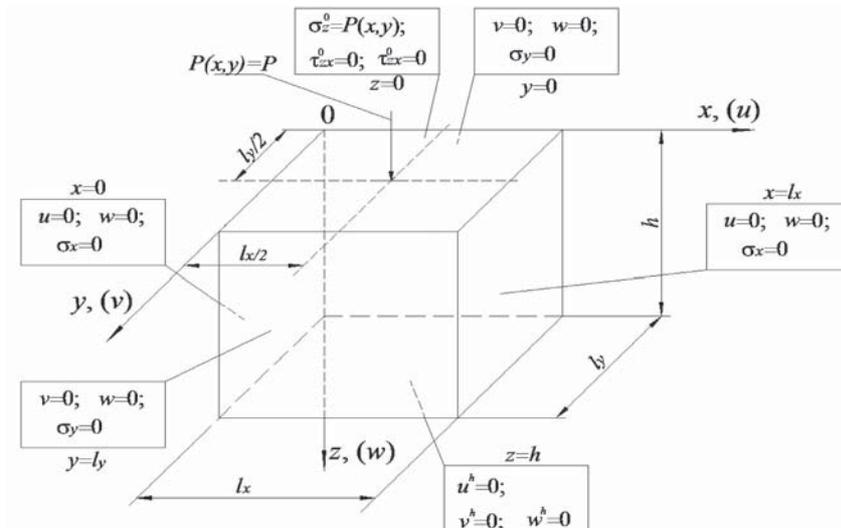


Рис. 1. Расчетная схема параллелепипеда. Граничные условия

Нагрузка

Коэффициенты двойного тригонометрического ряда Фурье для сосредоточенной силы определяются по формуле

$$p_{mn} = \frac{4P}{l_x l_y} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Ряд Фурье с коэффициентами (4) является расходящимся в точке приложения силы, однако при удержании в нем конечного числа членов функция нагрузки будет непрерывной.

Для сглаживания колебаний функции $P(x,y)$ и уменьшения явления Гиббса в точках разрыва применены σ -множители Ланцоша [13]. При удержании конечного числа членов ряда Фурье M и N коэффициенты p_{mn} домножаются на σ -множители. Тригонометрический полином для $P(x,y)$ записывается в виде

$$P(x,y) = \frac{4P}{l_x l_y} \sum_m^M \sum_n^N \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{M}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\left(\frac{m\pi}{M}\right) \left(\frac{n\pi}{N}\right)} \sin\left(\frac{m\pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l_y} y\right). \quad (5)$$

Трехмерный график такой функции будет иметь форму вытянутого колокола с квадратным основанием.

Рассмотрены три варианта нагружения с удержанием по каждой координате 71, 83 и 101 члена ряда (5). Во избежание проблемы вычислительной неустойчивости (см. [14], [15]) серией вычислительных экспериментов определена длина мантииссы представления чисел. Для 71 гармоники по каждой из координат принята мантиисса длиной 155, для 83 — 170, для 101 — 205 значащих цифр. На рис. 2 представлены графики нагрузки с различными M и N .

Ближайшие к точке приложения силы корни уравнений $P(x,y) = 0$ определяют размеры квадратных грузовых площадок Al_i со сторонами a_i . Сила, соответствующая центральному пику функции (5), определяется интегралом

$$S_i = \int_{Al_i} P(x,y) dx dy. \quad (6)$$

Разность между интегралами функции нагрузки S_i по площадкам $Al = a_i^2$ и значения силы P не больше 5 % и медленно уменьшается с ростом числа удерживаемых гармоник: 4,812 % — для $M = N = 71$ и 4,808 % — для $M = N = 101$.

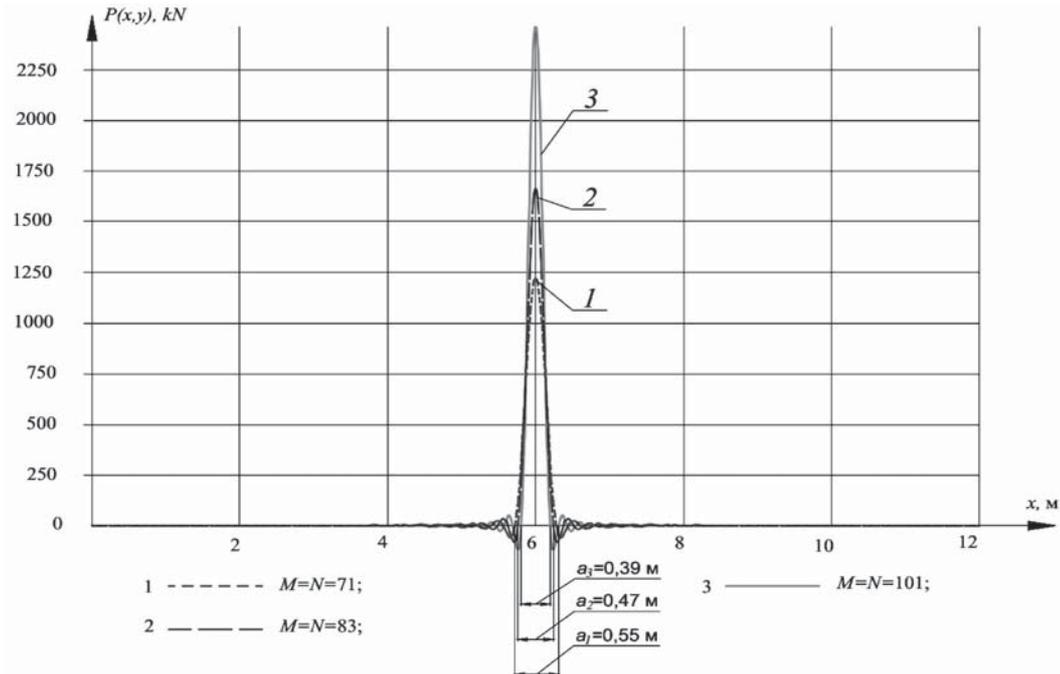


Рис. 2. Сосредоточенная сила $P = 10^2$ кН в центре верхней грани параллелепипеда 12×12 м при $y = l_y/2$:
1 — $N = M = 71$; 2 — $N = M = 83$; 3 — $N = M = 101$

Результаты расчетов

Для сравнения безразмерных величин напряжений вычислены относительные значения нормальных напряжений, определяемые соотношением $\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{P/a_i^2}$.

На рис. 3 показаны графики изменения по глубине (координате z) относительных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_z$ под точкой приложения силы. Эпюры представлены для трех вариантов описания нагрузки, также показана кривая по решению Буссинеска. Из графиков видно, как при увеличении количества удерживаемых членов ряда (5) изменяется распределение напряжений по глубине: с ростом чисел M и N происходит приближение к решению задачи ТУ.

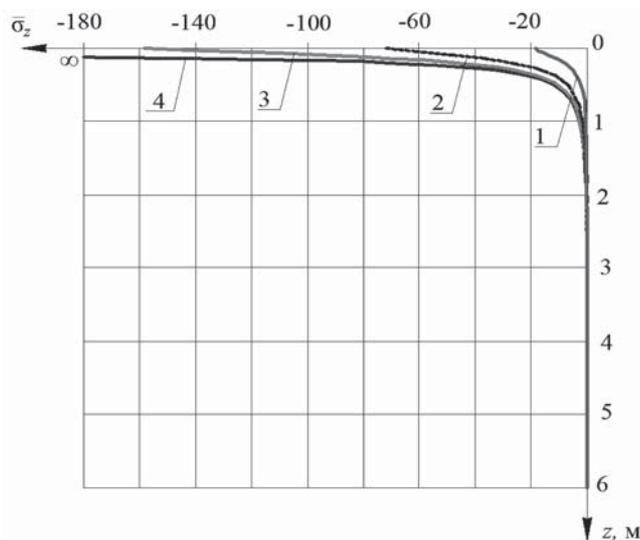


Рис. 3. Эпюры относительных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_z$ по глубине толщи в центре грузовой площадки:
1 — МНФ, $M = N = 71$; 2 — МНФ, $M = N = 83$;
3 — МНФ, $M = N = 101$; 4 — решение Буссинеска

Если принять распределение нагрузки от центрального пика S_i постоянным и определить размер квадратной площадки из условия

$$a_i = \sqrt{\frac{P(x=l_x/2, y=l_x/2)}{S_i}},$$

то вычисленные по формулам Лява напряжения $\bar{\sigma}_z$ в точке $x=l_x/2$ и $y=l_y/2$ практически по всей глубине толщи очень близки к значениям, полученным МНФ (рис. 4).

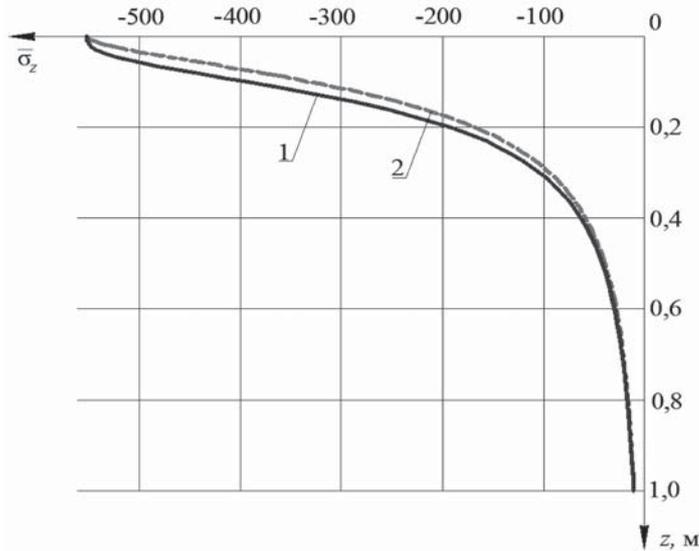


Рис. 4. Эпюры относительных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_z = \sigma_z / (S_i / a^2)$ по глубине толщи в центре грузовой площадки:
 1 — по формулам Лява; 2 — МНФ, $M = N = 101$

Максимальные расхождения значений наблюдаются на глубине $z = 0,54a_i$ и составляют около 16 %. Для случаев 1 и 2 описания нагрузки ($M = N = 71$ и $M = N = 83$ соответственно) характер эпюр остается таким же, как на рис. 4, но точка максимальных расхождений в значениях $\bar{\sigma}_z$ по МНФ и формулам Лява по глубине z располагается дальше от начальной плоскости.

Графики относительных вертикальных перемещений $\bar{w} = \frac{wE}{P / a_3^2 h}$ при $z = 0$ в середине параллелепипеда, полученных МНФ и по формуле Буссинеска, хорошо согласуются между собой за исключением точки приложения силы (рис. 5).

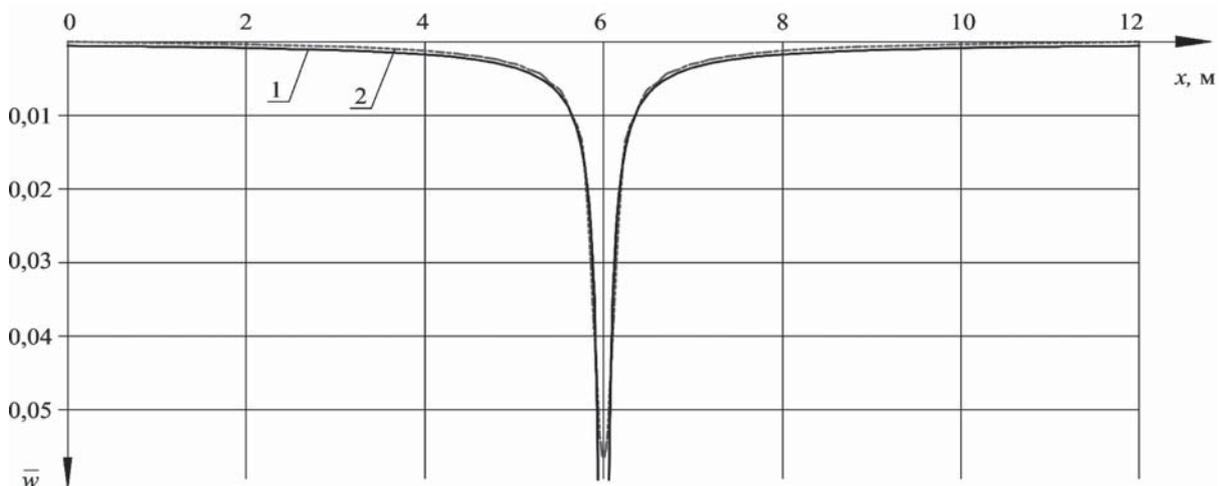


Рис. 5. Изолинии относительных перемещений \bar{w} :
 1 — по формулам Буссинеска; 2 — МНФ, $M = N = 101$

Заключение

Предложенный способ моделирования локальной нагрузки для параллелепипеда позволяет получать результаты, которые хорошо согласуются с решениями теории упругости для полупространства.

С ростом числа удерживаемых членов тригонометрического полинома, получающегося из усеченного ряда Фурье, возрастает максимальное значение функции в центре квадратной грузовой площадки с одновременным уменьшением ее размеров. Такой подход можно применять для приближенного описания распределенной нагрузки на малом участке, когда известна лишь ее суммарная величина, а закон распределения давления точно неизвестен, либо не имеет существенного значения в рамках поставленной инженерной задачи.

Изменяя количество удерживаемых членов ряда, можно подобрать функцию (сохраняя ее интегральное значение), с нужными размерами грузовой площади и таким образом описывать силовое воздействие на основание фундамента гидротехнического сооружения, колес портовых погрузчиков с упругими шинами и другого подъемно-транспортного оборудования, применяемого в портах.

Список литературы

1. *Ширунов Г. Н.* Анализ напряженно-деформированного состояния упругого слоя под действием локальной нагрузки методом начальных функций / Г. Н. Ширунов // Вестник гражданских инженеров. — 2014. — № 5(46). — С. 58–67.
2. *Shirunov G. N.* A method of initial functions in analyzing a stress and strain state of an elastic layer // 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA) Editor: E. I. Veremey. Санкт-Петербургский государственный университет; IEEE (IEEE Catalog number CFP14BDA–USB). — 2014. — С. 166–167.
3. *Голоскоков Д. П.* Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов / Д. П. Голоскоков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2013. — № 1. — С. 8–14.
4. *Голоскоков Д. П.* Аналитический расчет водоудерживающей обшивки сегментного затвора в гидротехнических сооружениях / Д. П. Голоскоков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2012. — № 4. — С. 22–29.
5. *Голоскоков Д. П.* Математическое моделирование нестационарных температурных полей / Д. П. Голоскоков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2011. — № 1. — С. 79–83.
6. *Матросов А. В.* Численно-аналитический расчет балок-стенок на линейно-упругом основании / А. В. Матросов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2011. — № 2. — С. 14–21.
7. *Матросов А. В.* Расчет балочных перекрытий численно-аналитическим методом / А. В. Матросов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2012. — № 1. — С. 8–15.
8. *Матросов А. В.* Численно-аналитическое моделирование передачи усилий от балки к пластине / А. В. Матросов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2011. — № 4. — С. 21–27.
9. *Матросов А. В.* Оценка краевых эффектов в задаче взаимодействия нагруженной полосы и упругой среды / А. В. Матросов, Г. Н. Ширунов // Вестник гражданских инженеров. — 2014. — № 2(43). — С. 61–64.
10. *Ширунов Г. Н.* Точные решения задачи теории упругости для проверки практической сходимости конечно-элементных моделей / Г. Н. Ширунов // Вестник гражданских инженеров. — 2013. — № 6 (41). — С. 53–57.

11. *Матросов А. В.* Замкнутая форма операторов метода начальных функций для пространственной задачи теории упругости / А. В. Матросов, Г. Н. Ширунов // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. — СПб.: Изд. дом СПбГУ, 2013. — С. 256–262.

12. *Матросов А. В.* Алгоритмы получения замкнутых форм операторов метода начальных функций для пространственных задач теории упругости / А. В. Матросов, Г. Н. Ширунов // Вестник гражданских инженеров. — 2014. — № 1 (42). — С. 136–144.

13. *Голоскоков Д. П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе *Maple*. / Д. П. Голосков. — СПб.: Питер, 2004. — 538 с.

14. *Матросов А. В.* Вычислительная неустойчивость алгоритма метода начальных функций / А. В. Матросов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2010. — № 4. — С. 30–39.

15. *Galileev S. M.* Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures / *S. M. Galileev, A. V. Matrosov* // *Composite Structures*. — 1997. — Т. 39. — № 3–4. — С. 255–262.