**Список литературы**

1. *Михальский В. А.* Метрология в кораблевождении и решение задач навигации / В. А. Михальский, В. А. Катенин. — СПб.: Элмор, 2009. — 288 с.

2. *Груздев Н. М.* Теория навигационных погрешностей / Н. М. Груздев. — СПб.: СПбВМИ, 2002. — 325 с.

3. Лаврентьев А. В. Технические средства кораблевождения / А. В. Лаврентьев, С. Ф. Лабутин, А. Б. Парамонов, А. И. Тузов: учебник. — М.: Морские средства навигации надводных кораблей, 2007. — С. 101–114.

4. *Михальский В. А.* Теория и модели погрешностей навигационных измерений / В. А. Михальский, А. Г. Кушнарев, М. В. Тюлькин [и др.] — СПб.: ВСОК ВМФ, 2006.

5. *Пешехонов В. Г.* Единая система инерциальной навигации и стабилизации «Ладога-М» / В. Г. Пешехонов, Б. Л. Шарыгин, Ю. В. Миронов // Морская радиоэлектроника. — 2003. — № 1. — С. 26–30.

6. *Бабиченко А. В.* Инженерная физика / А. В. Бабиченко, В. К. Шкред // Научно-технический журнал. — 2011. — № 11. — С. 33–52.

7. *Иванов Б. Е.* К вопросу о навигационной безопасности плавания / Б. Е. Иванов / Пятая Российская науч.-практ. конференция «Современное состояние и проблемы навигации и океанографии» (НО-2004). — СПб.: ГНИНГИ МО РФ, 2004. — С. 74–86.

8. *Соколов А.И.* Навигация и управление движением / А. И. Соколов, А. С. Фирса / Материалы XV конференции молодых ученых «Обработка сигнала в электромагнитном лаге». — СПб., 2013. — С. 88–94.

9. *Смирнов Е. Л.* Технические средства судовождения. — Т. 2. / Е. Л. Смирнов, А. В. Яловенко, В. К. Перфильев. — СПб.: Элмор, 2000.

10. *Борисов Д. В.* Возможности приёмоиндикаторов СРНС ГЛОНАСС и NAVSTAR, установленных на кораблях и судах ВМФ / Д. В. Борисов // Научно-методический сборник. — СПб.: СПбВМИ, 2006. — С. 54–60.

11. Алексеев С.П. Об интеграции информационного обеспечения задач навигации, стабилизации и управления движением морских подвижных объектов / С.П. Алексеев, Г.И. Емельянцев // Навигация и гидрография. — 1996. — № 2. — С. 73–76.

12. *Горкавенко Ю. Н.* Радиотехнические и астронавигационные средства кораблевождения. — Ч. 1 / Ю. Н. Горкавенко, А. В. Лаврентьев, Н. Б. Лукашевич и др. — СПб.: СПбВМИ, 2001. — С. 84–99.

13. *Горкавенко Ю. Н.* Основы устройства и использования навигационной аппаратуры потребителя «Бриз» среднеорбитных спутниковых систем ГЛОНАСС и NAVSTAR / Ю. Н. Горкавенко, А. А. Опалев, М. Ю. Шелякин. — СПб.: СПбВМИ, 2001. — С. 63–72.

14. *Соловьев Ю. А.* Спутниковая навигация и ее приложения / Ю. А. Соловьев. — М.: Эко-Трендз, 2003. — 326 с.

**УДК 532.516.5:532.582.32**

**А. В. Коптев**
канд. физ.-мат. наук, доц.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОДВОДНОГО ТЕЧЕНИЯ НА ДИНАМИКУ КОРАБЛЯ

# REAEARCH OF INFLUENCE OF UNDERWATER CURRENT ON THE DYNAMICS OF THE SHIP

*Предложен аналитический метод расчета воздействия подводного течения на погруженную часть корабля. Метод основан на решении краевой задачи для уравнений установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости при граничных условиях прилипания и условии для скорости водного потока в задан-*

*ной внешней точке. В качестве определяющих уравнений использовался интеграл уравнений Навье – Стокса для 2D установившегося движения. В результате решения задачи получены новые формулы, определяющие вертикальную и горизонтальную составляющие результирующей силы как функции исходных параметров, задающих геометрические размеры обтекаемого тела, а также интенсивность и направление подводного течения. Произведены вычисления с помощью пакета стандартных программ Maple и найдены оценки для значений гидродинамических сил.*

*On the paper under consideration we offer the analytical computational method for estimation of influence of underwater current upon the submerged part of the ship. Method is based on the decision of boundary value problem for equations of viscous incompressible steady state fluid flow with adhesion condition together with the condition for water-course velocity in the set external point. We take the integral of 2D steady state Navier – Stokes equations as the base equalizations. As a result of problem decision the new formulas for vertical and horizontal constituents of resulting force were obtained. The latter determines lift force and front resistance as functions of geometric dimensions of streamlined body together with the intensity and direction of underwater currents. Calculations are produced by means of routine package of Maple programs and values of hydrodynamic forces were found out.*

*Ключевые слова: судно, обтекание, вязкая несжимаемая жидкость, уравнение, интеграл, подъемная сила, лобовое сопротивление.*

*Key words: ship, overflow, viscous incompressible fluid, equation, integral, lift force, frontal resistance.*

---

В ПРАКТИКЕ мореплавания нередко встречаются ситуации, когда приходится осуществлять навигацию в районах действия интенсивных подводных течений. Подводные течения воздействуют на погруженную часть судна и влияют на баланс действующих сил [1]. Так, основными силами, действующими на судно в вертикальном направлении, являются сила тяжести, направленная вниз. и выталкивающая архимедова сила, направленная вверх. При движении судна эти силы в среднем уравновешивают друг друга. Однако в зоне действия подводного течения, когда происходит обтекание скоростным водным потоком погруженной части судна, баланс сил изменяется, возникают дополнительные силы, имеющие гидродинамическую природу, такие как подъемная сила (*Lift Force*), направленная вертикально вверх, и так называемая сила лобового сопротивления (*Frontal Resistance*), направленная горизонтально. В общем балансе сил их влияние может быть довольно значительным. С одной стороны, судно получает дополнительную положительную плавучесть и возникает тенденция всплытия, а с другой — возникает дополнительный крен и дифферент. Указанные факторы особенно важны для высокосидящих судов, таких как круизные лайнеры и морские паромы. В истории мореплавания известны случаи, когда влияние подводного течения оказывалось решающим. Судно получало крен больше критического, теряло остойчивость, что в результате приводило к катастрофе. Даже в недалеком прошлом такие катастрофы имели место. Достаточно вспомнить гибель паромов «Эстония» на Балтике (1994 г.), «Коста Конкордия» в Тирренском море (2012 г.), «Севоль» в Желтом море (2014 г.).

Чтобы учесть, в полной мере, влияние подводного течения на динамику корабля, необходимо на основе уравнений гидромеханики исследовать обтекание погруженной части корабля водным потоком и рассчитать возникающие при этом гидродинамические силы. Для решения этой задачи предлагается пренебречь некоторыми конструктивными особенностями днища корабля и в качестве простейшей модели погруженной части рассмотреть часть кругового цилиндра радиуса $R$ и углом раствора $2\alpha$. Предлагается рассматривать вариант плоской задачи, когда подводное течение действует в поперечном направлении и картина течения одинакова во всех плоскостях, перпендикулярных главной оси судна. В сечении погруженной части цилиндра перпендикулярной плоскостью имеем сегмент круга радиуса $R$ с углом раствора $2\alpha$, где $\alpha$ — некоторое заданное значение угла из диапазона $0 \leq \alpha \leq \pi$. Контуром обтекаемой поверхности является нижняя круговая часть этого сегмента, а верхняя его часть соответствует уровню свободной поверхности. Считаем, что происходит безотрывное ламинарное обтекание погруженной части судна внешним потоком жидкости, которую предполагаем вязкой и несжимаемой [2] – [4]. В качестве жидкости рассматриваем морскую воду с заданными и неизменными физическими свойствами. Считаем, что $\rho$ — плотность, а $\nu$ — коэффициент кинематической вязкости.

Задачу рассматриваем в декартовых координатах, оси которых направим через центр окружности, получающейся в результате сечения цилиндра поперечной плоскостью. Начало координат, таким образом, отстоит от свободной поверхности на величину $R\cos\alpha$. Ясно, что в выбранной системе координат эта величина, в общем случае, может быть и положительной, и отрицательной, и нулевой. Первая возможность реализуется при $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$, вторая — при $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ и третья — при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Условия для набегающего водного потока зададим в произвольно выбранной точке $M_0$, расположенной вне цилиндра, на заданной глубине. Пусть абсцисса точки $M_0$ равна $L$, а ордината — $H$, где $L$ и $H$ представляют некоторые положительные параметры. Так что точка $M_0$ находится на расстоянии $L$ с левой стороны от вертикальной оси на глубине $H - R\cos\alpha$, считая от свободной поверхности. В точке $M_0$ полагаем заданными и продольную, и поперечную скорость движения водного потока.

Задачу рассматриваем в безразмерных переменных, выбрав удобные для данного случая масштабы. Пусть $U_0$ — модуль скорости жидкости в точке $M_0$. Эту величину выбираем в качестве масштаба скорости. Заданную величину $L$ полагаем масштабом длины, $\frac{U_0^2}{L}$ — масштабом ускорения, а произведение $\rho U_0^2$ — масштабом давления.

В безразмерных переменных координаты точки $M_0$ определяются равенствами $x_{M_0} = -1$, $y_{M_0} = -h$, где $h = \frac{H}{L}$. Контур обтекаемого тела представляется частью окружности с уравнением $x^2 + y^2 = r^2$, где $r = \frac{R}{L}$ — безразмерный радиус цилиндра, $0 < r < 1$. Свободная поверхность соответствует плоскости, определяемой уравнением $y = y_0$, где $y_0 = -r\cos\alpha$. Интересующая нас область течения расположена ниже этой плоскости, так что вертикальная координата должна удовлетворять неравенству

$$y \le y_0. \tag{1}$$

Задачу предлагается рассматривать на основе 2D уравнений Навье – Стокса для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости [2] – [4]. Записанные в безразмерных переменных, они имеют вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \tag{2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right); \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Здесь $u$ и $v$ — соответственно продольная и поперечная скорости движения водного потока; $p$ — давление; Re — число Рейнольдса, определяемое формулой $\mathrm{Re} = \frac{U_0 L}{\nu}$; $\Phi$ — потенциал внешних сил. Для рассматриваемого случая $\Phi = g(y - y_0)$, где $g$ — безразмерное ускорение свободного падения, $y$ — вертикальная координата.

Уравнения (2) – (4) следует дополнить граничными условиями, которые предлагается задать следующим образом. Первое граничное условие состоит в том, что вдоль контура обтекаемого тела продольная и поперечная компоненты скорости обращаются в нуль. В этом состоит так называемое условие прилипания при обтекании тела вязкой жидкостью [2] – [4]. В принятых ранее обозначениях оно сводится к двум равенствам:

$$u\big|_{x^2+y^2=r^2}=0; \quad v\big|_{x^2+y^2=r^2}=0. \tag{5}$$

Предполагается, что эти равенства выполнены лишь для нижней обтекаемой части сегмента, для которой справедливо неравенство $-r \le y \le y_0$. Второе граничное условие задает скорость набегающего водного потока вне обтекаемого тела и задается в точке $M_0(-1; -h)$. В этой точке должен быть задан вектор скорости. В соответствии с выбором масштабов модуль этого вектора (величина $U_0$) задает масштаб скорости. Поэтому достаточно задать лишь угол наклона данного вектора или его тангенс. Последняя величина равна отношению поперечной и продольной скорости в точке $M_0$. Будем считать, что тангенс угла наклона вектора скорости равен заданной величине $k = \operatorname{tg}\theta$, где $\theta$ — значение угла наклона. Таким образом, второе граничное условие соответствует равенству

$$\frac{v(-1;-h)}{u(-1;-h)}=k, \tag{6}$$

где $h$ и $k$ — заданные безразмерные параметры.

Чтобы упростить задачу, предлагается исходить не из уравнений Навье – Стокса (2) – (4) непосредственно, а из первого их интеграла. Эти соотношения, предложенные в работах [5] и [6], выведены с учетом сохранения нелинейных членов и представляют уравнения более низкого порядка относительно основных неизвестных. Кроме того, они определяют общую структуру решений [10], [11] и открывают новые возможности для построения решений [7], [12]. Указанные обстоятельства делают данные соотношения более простыми и удобными в математическом плане, чем исходные уравнения (2) – (4). Для рассматриваемого случая 2D установившегося движения первый интеграл уравнений Навье – Стокса сводится к трем равенствам:

$$p+g(y-y_0)+\frac{U^2}{2}+d=0; \tag{7}$$

$$u^2-v^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y^2}; \tag{8}$$

$$uv-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial x\partial y}. \tag{9}$$

В уравнениях (7) – (9) использованы следующие условные обозначения: $\Psi_{12}$ — новое ассоциированное неизвестное; $U$ и $d$ — соответственно модуль скорости точки водного потока и диссипация вследствие трения, вычисляемые по формулам:

$$U=\sqrt{u^2+v^2}; \qquad d=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y^2}\right). \tag{10}$$

Произвольные функции одной переменной, возникающие в общем случае при интегрировании в уравнениях (7) и (8), полагаем равными нулю. К уравнениям (7) – (9) следует добавить уравнение неразрывности (4) и граничные условия (5) и (6). Таким образом, в математическом плане постановка задачи сводится к решению четырех дифференциальных уравнений: (4), (7) – (9), относительно неизвестных $u$, $v$, $p$, $\Psi_{12}$ при граничных условиях (5) и (6). Предлагаемая постановка требует также задания пяти исходных параметров: угла полураствора $\alpha$, числа Рейнольдса Re, безразмерных радиуса цилиндра $r$ и глубины $h$ для выбранной характерной точки $M_0$, а также числа $k$, определяющего направление вектора скорости в точке $M_0$.

Силы гидродинамического воздействия на погруженную часть корабля можно найти, если решена краевая задача для уравнений (4), (7) – (9) при условиях (5) и (6). Имеем задачу обтекания части цилиндра установившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости. Задачи этого типа представляют известный класс задач теоретической гидромеханики и имеют практическое значение. Начиная с Дж. Стокса, задачи такого типа рассматривались разными авторами и для их решения применялись различные подходы. Однако и на сегодняшний день общепринятого варианта решения нет. Основные сложности возникают из-за нелинейности уравнений и из-за задания граничного условия для набегающего потока на бесконечности [2] – [4]. При граничных условиях, аналогичных условиям (5) и (6), задача рассматривалась в работе [8]. Было предложено использовать первый интеграл уравнений Навье – Стокса, тем самым понижая порядок нелинейных членов и задавать граничное условие для набегающего потока в конечной точке. В указанной работе имело место полное обтекание цилиндра, когда роль контура обтекаемой поверхности играла целая окружность $x^2 + y^2 = r^2$. Точка $M_0$ задавалась координатами $x|_{M_0} = -1$, $y|_{M_0} = 0$, т. е. она была расположена в плоскости симметрии обтекаемого тела.

В настоящей работе постановка задачи содержит два существенных отличия. Во-первых, контур обтекаемой поверхности представляет лишь часть окружности в соответствии с ограничением $-r \le y \le -r\cos\alpha$. Имеем не полное, а лишь частичное обтекание контура, задаваемое углом полураствора α. Во-вторых, точка $M_0$ расположена на произвольной глубине и в общем случае несимметрично по отношению к обтекаемой поверхности. В соответствии с условием $y|_{M_0} = -h$ вводится дополнительный параметр глубины $h$, что дает возможность рассматривать подводные течения. Таким образом, в постановку задачи по сравнению с [8] внесено изменение во втором граничном условии (условии (6)) и вводятся два дополнительных параметра: $h$ и α. Однако, несмотря на эти различия, для рассматриваемого случая начальные этапы решения совпадают с соответствующими этапами работы [8], и некоторыми её результатами можно воспользоваться. В частности, можно использовать выражения для поля скорости водного потока [8, формулы (13) – (14)] и для давления [8, формула (21)]:

$$u = \frac{1}{r^4}\cdot\left(r^2 - x^2 - y^2\right)\cdot\Big[a_{01}r^2 + a_{11}r^2x + 2a_{02}r^2y - a_{01}x^2 - 4a_{10}xy - 5a_{01}y^2 - a_{11}x^3 +$$

$$+x^2y\cdot 2\left(a_{22}r^2 + a_{02}\right) - 5a_{11}xy^2 + y^3\cdot 2\left(a_{22}r^2 - a_{02} + 2a_{20}\right)\Big]; \tag{11}$$

$$v = -\frac{1}{r^4}\cdot\left(r^2 - x^2 - y^2\right)\cdot\Big[a_{10}r^2 + 2a_{20}r^2x + a_{11}r^2y - 5a_{10}x^2 - 4a_{01}xy - a_{10}y^2 +$$

$$+x^3\cdot 2\left(a_{22}r^2 - a_{20} + 2a_{02}\right) - 5a_{11}x^2y + xy^2\cdot 2\left(a_{22}r^2 + a_{20}\right) - a_{11}y^3\Big]; \tag{12}$$

$$p = -g(y - y_0) + \left(2b_{20} - a_{10}^2 - \frac{2a_{11}}{\mathrm{Re}}\right) - x\left(2a_{20}a_{10} + a_{11}a_{01} + \frac{16a_{01}}{\mathrm{Re}r^2}\right) + y\left(2a_{20}a_{01} - a_{11}a_{10} + \frac{16a_{10}}{\mathrm{Re}r^2}\right) +$$

$$+x^2\left(-2a_{20}^2 - \frac{a_{11}^2}{2} + \frac{2}{r^2}\left(a_{01}^2 - a_{10}^2 - \frac{6a_{11}}{\mathrm{Re}}\right)\right) - \frac{8xy}{r^2}\left(a_{01}a_{10} - \frac{a_{20}}{\mathrm{Re}}\right) + y^2\left(\frac{2a_{10}^2}{r^2} - \frac{2a_{01}^2}{r^2} - 2a_{20}^2 - \frac{a_{11}^2}{2} + \frac{12a_{11}}{\mathrm{Re}r^2}\right) +$$

$$+\frac{4x^3}{r^2}\left(\frac{a_{20}a_{10}}{3} + a_{11}a_{01} + \frac{2a_{01}}{\mathrm{Re}r^2}\right) - \frac{2x^2y}{r^2}\left(8a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} + \frac{12a_{10}}{\mathrm{Re}r^2}\right) + \frac{2xy^2}{r^2}\left(8a_{20}a_{10} - a_{11}a_{01} + \frac{12a_{01}}{\mathrm{Re}r^2}\right) +$$

$$+\frac{4y^3}{r^2}\left(a_{11}a_{10} - \frac{a_{20}a_{01}}{3} - \frac{2a_{10}}{\mathrm{Re}r^2}\right) + \frac{x^4}{r^4}\left(7a_{10}^2 - 3a_{01}^2 + 2r^2a_{11}^2 + 4r^2a_{20}^2 + \frac{8a_{11}}{\mathrm{Re}}\right) + \frac{8x^3y}{r^4}\left(\frac{7}{3}a_{10}a_{01} - r^2a_{20}a_{11} - \frac{8a_{20}}{\mathrm{Re}}\right) +$$

$$+\frac{4x^2y^2}{r^4}\left(a_{01}^2 + a_{10}^2\right) + \frac{8xy^3}{r^4}\left(\frac{7}{3}a_{10}a_{01} + r^2a_{20}a_{11} - \frac{8a_{20}}{\mathrm{Re}}\right) + \frac{y^4}{r^4}\left(7a_{01}^2 - 3a_{10}^2 + 4r^2a_{20}^2 + 2r^2a_{11}^2 - \frac{8a_{11}}{\mathrm{Re}}\right). \tag{13}$$

Приведенные выражения являются результатом решения определяющих уравнений с учетом лишь одного граничного условия – условия прилипания. Они справедливы и в рассматриваемом случае, с той лишь разницей, что в правой части выражения для $p$ следует полагать $y_0 = -r\cos\alpha$. Выбор аддитивной постоянной давления в (13) можно осуществить аналогично работе [8], приняв $b_{20} = \frac{1}{2}a_{10}^2 + \frac{a_{11}}{\mathrm{Re}}$, а также используя полученные в работе [8, формулы (16) и (17)] выражения для коэффициентов разложения $a_{ij}$:

$$a_{10} = \frac{24}{r\,\mathrm{Re}}c_0;\;\; a_{01} = \pm\frac{24}{r\,\mathrm{Re}}\sqrt{1 - c_0^2};\;\; a_{22} = 0;$$

$$a_{11} = \frac{24}{r^2 \mathrm{Re}}\left(2c_0^2 - 1\right); \; a_{02} = \pm\frac{24}{r^2 \mathrm{Re}} c_0\sqrt{1-c_0^2}; \; a_{20} = \mp\frac{24}{r^2 \mathrm{Re}} c_0\sqrt{1-c_0^2}. \tag{14}$$

В выражении (14) $c_0$ представляет некоторую величину, удовлетворяющую неравенству

$$-1 \le c_0 \le 1. \tag{15}$$

Однако на этапе вычисления подъемной силы и силы лобового сопротивления имеем существенные отличия от работы [8]. Для рассматриваемого случая обтекаемый контур представляет лишь часть окружности, и выражение (13) следует интегрировать вдоль интервала углов φ, соответствующего неравенству $-r \le y \le -r\cos\alpha$. В качестве такого интервала использован $\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha; \; -\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. С учетом этого обстоятельства исходные формулы для подъемной силы и силы лобового сопротивления [4], возникающих вследствие обтекания водным потоком, приобретают вид:

$$F_y = -\int_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} p\left(r\cos\varphi; \; r\sin\varphi\right)\cdot r\sin\varphi d\varphi; \quad F_x = -\int_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} p\left(r\cos\varphi; \; r\sin\varphi\right)\cdot r\cos\varphi d\varphi. \tag{16}$$

Интегрирование по этим формулам с учетом выражений (13) и (14) приводит к следующим результатам:

$$F_y = gr^2\left(\alpha - 0{,}5\sin 2\alpha\right) - \frac{576}{r\mathrm{Re}^2}\Big(-11{,}66\sin\alpha + 6{,}11\sin^3\alpha - 1{,}6\sin^5\alpha + c_0\left(1{,}67\alpha - 1{,}67\sin 2\alpha - 1{,}25\sin 4\alpha\right) +$$
$$+c_0^2\left(17{,}33\sin\alpha - 12{,}22\sin^3\alpha + 3{,}2\sin^5\alpha\right) + c_0^3\left(1{,}67\sin 4\alpha + 3{,}34\sin 2\alpha\right) +$$
$$+c_0^4(-3{,}2\sin^5\alpha + 5{,}34\sin^3\alpha - 8\sin\alpha)\Big); \tag{17}$$

$$F_x = \frac{480\sqrt{1-c_0^2}}{r\mathrm{Re}^2}\Big(2\alpha + 0{,}2\sin 2\alpha + 0{,}5\sin 4\alpha + c_0\left(16{,}8\sin^3\alpha - 7{,}68\sin^5\alpha\right) - 2c_0^2\sin 4\alpha +$$
$$+c_0^3(30{,}72\sin^5\alpha - 25{,}6\sin^3\alpha)\Big)\cdot \tag{18}$$

Формулы (17) и (18), которые определяют выражения для гидродинамических сил при произвольных значениях угла полураствора обтекаемой части $0 \le \alpha \le \pi$, являются новыми. В частном случае ($\alpha = \pi$) эти формулы приводят к выражениям для $F_x$, $F_y$, совпадающим с выражениями для случая полного обтекания кругового контура [8, формула (25)].

Проанализируем правые части формул (17) и (18). Ясно, что за исключением особо редких случаев, $F_y$ и $F_x$ отличны от нуля, а значит, парадоксов типа Стокса или Даламбера [2] – [4] в данном случае нет. В правых частях рассматриваемых формул присутствуют величины, задаваемые в качестве исходных, а также другие величины, требующие уточнения. Из заданных изначально величин там присутствует число Рейнольдса Re, радиус обтекаемого цилиндра $r$ и угол полураствора обтекаемой части α. Величина $c_0$ нуждается в уточнении. Ее значение следует определять с помощью граничного условия (6). Заметим также, что первая группа членов в правой части выражения для $F_y$ дает безразмерное значение архимедовой силы, действующей на погруженное в жидкость тело. Архимедова сила пропорциональна объему погруженной части тела и направлена вверх. В данном случае, когда рассматривается плоская задача, эта величина будет пропорциональна площади поперечного сечения погруженной части, т. е. площади сегмента окружности радиуса $r$ и углу раствора 2α. Площадь этой фигуры равна $r^2(\alpha - 0{,}5\sin 2\alpha)$. Именно такой множитель и наблюдается в первом положительном слагаемом правой части формулы (17).

Известно, что архимедова сила и сила тяжести являются статичными и никак не связаны с движением тела. В противоположность этому сила воздействия водного потока представляет динамическую составляющую, которая целиком определяется движением водного потока. Указанная динамическая составляющая вносит свой вклад в правую часть формулы (17) и целиком определяет правую часть (18). Каждое из этих слагаемых зависит от $c_0$. Определим значение этой величины, исходя из условия (6). С учетом выражений (11) и (12) для $u$, $v$ при $x = -1$, $y = -h$ составляем дробь $\dfrac{v(-1;-h)}{u(-1;-h)}$ и приравниваем ее заданной величине $k$. Уходя от знаменателя и используя выражения (14) и (15), получаем равенство, равносильное (6):

$$e_1c_0^2 + e_2c_0 + e_3 = \sqrt{1-c_0^2}\left(e_4c_0 + e_5\right). \tag{19}$$

Коэффициенты $e_i$ в (19) определяются через заданные параметры согласно формулам:

$$e_1 = 2r(h+k) - 2\frac{\left(k+h^3+5kh^2+5h\right)}{r};\;\; e_2 = 5 - r^2 + h^2 + 4kh;\;\; e_3 = -r(k+h) + \frac{\left(h^3+5kh^2+5h+k\right)}{r};$$

$$e_4 = 2r(1-kh) + 2\frac{\left(3h^3k+h^2-kh-3\right)}{r};\;\; e_5 = -5kh^2 - 4h - k\left(1-r^2\right). \tag{20}$$

Уравнение (19) представляет иррациональное уравнение относительно $c_0$. Чтобы его разрешить, необходимо избавиться от радикалов путем возведения в квадрат. Однако впоследствии следует произвести отбор корней, исходя из двух положений. Первое состоит в выполнимости ограничения (15), а второе — в том, что левая и правая части равенства (19) должны иметь одинаковые знаки. Для этого должно выполняться неравенство

$$\frac{e_1c_0^2 + e_2c_0 + e_3}{e_4c_0 + e_5} > 0. \tag{21}$$

Таким образом, в качестве критериев отбора корней при решении уравнения (19) имеем неравенства (15) и (21). Далее возводим равенство (19) в квадрат. После перегруппировки слагаемых приходим к уравнению четвертой степени относительно $c_0$, которое можно представить в виде

$$c_0^4 + \varsigma_1c_0^3 + \varsigma_2c_0^2 + \varsigma_3c_0 + \varsigma_4 = 0. \tag{22}$$

Коэффициенты $\varsigma_i$ последнего уравнения определены через коэффициенты $e_j$ уравнения (19) по формулам:

$$\varsigma_1 = 2\frac{e_1e_2 + e_4e_5}{e_1^2 + e_4^2};\;\; \varsigma_2 = \frac{2e_1e_3 + e_2^2 + e_5^2 - e_4^2}{e_1^2 + e_4^2};\;\; \varsigma_3 = 2\frac{e_2e_3 - e_4e_5}{e_1^2 + e_4^2};\;\; \varsigma_4 = \frac{e_3^2 - e_5^2}{e_1^2 + e_4^2}. \tag{23}$$

Уравнение (22) есть приведенное уравнение четвертой степени, которое может быть сведено к уравнениям более низких степеней, если воспользоваться методом Феррари и формулами Кордано [9]. Таким образом, данное уравнение можно разрешить аналитически, тем самым определив $c_0$ через исходные величины. В результате задача определения гидродинамических сил в общем виде будет решена.

Для практических целей удобно использовать численное решение уравнения (22). Этого можно достигнуть с помощью стандартных программ пакета *Maple*. В данной работе использована именно эта возможность. Приведем результаты расчетов. При некоторых значениях исходных параметров было произведено вычисление величины $c_0$ и всех других интересующих величин, включая $F_y$ и $F_x$. Величины, определяющие масштабы, были выбраны как $L = 10$ м и $U_0 = 2$ м/с. В качестве исходных параметров были взяты $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $k = 1$. Параметр $r$ был принят равным 0,5, что в размерных единицах соответствует $R = 5$ м. Этому значению радиуса соответствует судно среднего водоизмещения с поперечным размером порядка 10 м. Параметр $h$ полагался равным 1,5, так что точка $M_0$, в которой задается второе граничное условие, находится на глубине, равной $1{,}5 \cdot 10 - 5\cos\dfrac{\pi}{4} = 12{,}46$ м.

Безразмерные коэффициенты уравнения (22), найденные по формулам (21) и (23), равны $\varsigma_1 = -0{,}4261$, $\varsigma_2 = -0{,}9385$, $\varsigma_3 = 0{,}2746$, $\varsigma_5 = 0{,}1877$. Численное решение уравнения (22) с помощью программ *Maple* дало четыре возможных вещественных значения: $c_0^{(1)} = 0{,}8297$, $c_0^{(2)} = 0{,}7673$,

$c_0^{(3)} = -0{,}3665,\ c_0^{(4)} = -0{,}8044$, однако критериям отбора (15), (21) удовлетворяют не все из них. Если неравенству (15) удовлетворяют все четыре значения, то неравенству (21) — только $c_0^{(4)}$. Таким образом, в качестве решения уравнения (19) имеем только значение $c_0 = -0{,}8044$.

Подъемная сила и лобовое сопротивление, вычисленные по формулам (17), (18), в безразмерных единицах получились следующими: $F_y = 1{,}748 + 1{,}469 \cdot 10^{-11}$; $F_x = 4{,}383 \cdot 10^{-12}$. Расчеты показали, что $F_x$ является сравнительно малой величиной и что для $F_y$ основной вклад дает первое слагаемое, определяемое архимедовой силой, тогда как вклад от динамической составляющей, вызванной подводным течением, сравнительно невелик. Однако при уменьшении величины α и значения параметра $h$ эта тенденция начинает изменяться и вклады от гидродинамических составляющих становятся все более заметными. Они также становятся более значимыми и при увеличении интенсивности подводного течения, определяемого величиной $U_0$. Обращает на себя внимание также отличный от нуля момент силы $F_x$, который оказывает явное влияние на остойчивость судна в поперечном направлении.

**Вывод**. Предлагаемая модель и методика расчета позволяют на практике определять гидродинамические силы, возникающие вследствие подводного течения при обтекании подводной части корабля, и оценивать риски, связанные с их возникновением.

**Список литературы**

1. *Анфимов В. Н.* Устройство и гидромеханика корабля / В. Н. Анфимов. — Л.: Судостроение, 1974. — 368 с.

2. *Кочин Н. Е.* Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. – Ч. 2. — 727 с.

3. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1987. — 833 с.

4. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике / С. В. Валландер. — Л.: Изд-во Ленингр. госуд. ун-та им. А. А. Жданова, 1978. — 294 с.

5. *Коптев А.* В. Первый интеграл и пути дальнейшего интегрирования уравнений Навье – Стокса / А. В. Коптев // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. Серия: Естественные и точные науки. — 2012. — № 147. — С. 7–17.

6. *Коптев А. В.* Как проинтегрировать уравнения Навье – Стокса / А. В. Коптев // Физическая механика. — Вып. 8. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. — С. 218–226.

7. *Коптев А. В.* Решение начально-краевой задачи для 3D уравнений Навье – Стокса и его особенности /А. В. Коптев // Изв. Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. Серия: Естественные и точные науки. — 2014. — № 165. — С. 7–18.

8. *Коптев А.* В. Динамические реакции подводного трубопровода на морские течения / А. В. Коптев // Вестник государственного ун-та морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2014. — № 4. — С. 107–114.

9. *Кочаргин И. Ф.* Алгебраические уравнения / И. Ф. Кочаргин. — М.: Изд-во Физматкнига, 2006. — 160 с.

10. *Koptev A. V.* Structure of solutions of 3D Navier – Stokes equations / A. V. Koptev // Дифференциальные уравнения и динамические системы: материалы Междунар. конф. / Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН. — 2014. — С. 212–214.

11. Ko*ptev A. V.* The Structure of Solution of the Navier – Stokes Equations / A. V. Koptev // Вестник национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт». — Вып. 3 (6). — 2014. — С. 656 660.

12. *Koptev A. V.* Generator of solutions for 2D Navier – Stokes equations /A. V. Koptev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, Issue 7(3). — 2014. — P. 324–330.