

СУДОСТРОЕНИЕ И СУДОРЕМОНТ

УДК 539.386: 519.6: 629.12

М. В. Сухотерин,
д-р техн. наук, проф.;

С. О. Барышников,
д-р техн. наук, проф.;

Е. В. Потехина,
доц.

О РАСЧЕТАХ ПЛАСТИН ПО СДВИГОВЫМ ТЕОРИЯМ

ON SETTLEMENT PLATES IN SHEAR THEORIES

Рассмотрена сдвиговая теория Рейсснера и её аналоги. По теории Рейсснера приводится решение задач изгиба прямоугольных пластин двух видов: защемленной по контуру и консольной под действием равномерной нагрузки. Для решения используется итерационный метод суперпозиции исправляющих функций, которые представляют собой гиперболотригонометрические ряды по двум координатам. В качестве основного приближения для функции прогибов выбран многочлен, удовлетворяющий основному дифференциальному уравнению изгиба и условиям отсутствия прогибов защемленных граней. Исправляющие функции прогибов являются бигармоническими; исправляющие функции напряжений удовлетворяют уравнению Гельмгольца. Указанные функции, удовлетворяя условиям на двух параллельных кромках, на двух других порождают невязки. Процесс взаимного устранения невязок приводит в пределе к точному решению.

The article discusses shear theory of Reissner and its analogues. There is a solution according to the theory of Reissner tasks bending of rectangular plates of two types: edges contour and console under the action of uniform load. The iterative method of superposition correcting functions, which are two-dimensionally hyperbolic-trigonometric series, is used for the solution. As a basic approximation for the function of the deflections it was selected polynomial satisfying the basic differential equation of the curve and the absence of deflections pinched faces. Correcting deflection functions are biharmonic; the correcting stress functions satisfies the Helmholtz equation. These functions satisfy the conditions on two parallel edges, the other two generate residuals. The process of mutual elimination of residuals leads in the limit to the exact solution. The obtained numerical results are discussed.

Ключевые слова: сдвиговая теория, прямоугольная защемленная по контуру и консольная пластины Рейсснера, изгиб, гиперболотригонометрические ряды.

Key words: shear theory, rectangular edges contour and console plate of Reissner, bending, hyperbolic-trigonometric series.



ПЛАСТИНЫ являются расчетной схемой многих элементов конструкций (современное судно на 90 % состоит из пластин). В отраслях техники, связанных с высокими технологиями (авиационная и космическая техника, судостроение, энергетика), стремление к снижению веса конструкции и отдельных её элементов повышает требования к точности прочностных расчетов. Во многих случаях «старые» испытанные теории уже не дают удовлетворительных результатов, и исследователи либо пытаются увеличить точность вычислений, либо обращаются к уточненным теориям, которые резко усложняют математическую модель задачи.

При выводе соотношений между напряжениями и прогибом в классической теории [1] игнорируется искажение элементов пластины, вызываемое перерезывающими силами, равносильное предположению о том, что при модуле сдвига $G_z = \infty$ пластина перестает быть изотропной. Она не реагирует на кручение, производимое некоторой парой, приложенной к цилиндрической поверхности пластины, если вектор пары совпадает с нормалью к этой поверхности. Такое упрощение позволяет заменить приращение крутящих пар $\partial M_{xy} / \partial y$, обусловленных горизонтальными

касательными напряжениями по краю пластины, воздействием вертикальных сил Q_x или Q_y , приложенных по тому же краю, и тем самым снизить число граничных условий с трех до двух. Эта теория дает для прогиба дифференциальное уравнение четвертого порядка с двумя граничными условиями по каждому краю. Указанная неточность классической теории может с ростом относительной толщины пластины существенно изменять НДС вблизи её контура (особенно в окрестностях точек, где происходит резкая смена граничных условий), а также вблизи малых отверстий и точек приложения сосредоточенных сил.

Теория Рейсснера учитывает деформации поперечного сдвига, производимые перерезывающими силами Q_x и Q_y , при изгибе. Э. Рейсснер [2] предложил принять линейный закон для распределения компонентов напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} по толщине $-h/2 \leq z \leq h/2$ пластины [1]:

$$\sigma_x = 12M_x z / h^3; \quad \sigma_y = 12M_y z / h^3; \quad \tau_{xy} = -12M_{xy} z / h^3, \quad (1)$$

что приводит к следующим выражениям для остальных напряжений:

$$\tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]; \quad \tau_{zx} = \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]; \quad \sigma_z = -\frac{3q}{4} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right]. \quad (2)$$

Первые пять соотношений (1) и (2) совпадают с аналогичными соотношениями классической теории. Отличие состоит лишь в выражении для δ_z , которое в обычной теории полагалось равным нулю. Здесь q — поперечная нагрузка.

Изгибающие и крутящий моменты определяются по формулам:

$$M_x = D \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} q \right); \quad M_y = D \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} q \right);$$

$$M_{xy} = -D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right), \quad (3)$$

где $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ — жесткость; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; φ_x , φ_y — средние значения угловых деформаций (поворотов) сечений x , $y = \text{const}$.

Средние значения угловых деформаций сечений имеют вид:

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} Q_x; \quad \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} Q_y, \quad (4)$$

где w — среднее по толщине пластины значение прогибов пластины.

С учетом (4) формулы (3) запишутся в виде:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu}; \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu};$$

$$M_{xy} = (1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Перерезывающие силы будут связаны уравнениями:

$$Q_x - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_x = -D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}; \quad Q_y - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_y = -D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y}, \quad (6)$$

где ∇^2 — двумерный оператор Лапласа.

Для средних прогибов Э. Рейсснером было получено уравнение

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla^2 q, \quad (7)$$

которое при равномерной нагрузке совпадает с уравнением изгиба пластины Кирхгоффа.

Для явного представления перерезывающих сил вводится некоторая новая функция ψ (функция напряжений) с помощью двух соотношений:

$$Q_x = Q_x^* - D \frac{\partial(\nabla^2 w^{**})}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad Q_y = Q_y^* - D \frac{\partial(\nabla^2 w^{**})}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (8)$$

Здесь средний прогиб представлен суммой $w = w^* + w^{**}$ какого-либо частного решения уравнения (7) и бигармонической составляющей, а силы Q_x^* , Q_y^* удовлетворяют уравнениям:

$$Q_x^* - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_x^* = -D \frac{\partial(\nabla^2 w^*)}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}; \quad Q_y^* - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_y^* = -D \frac{\partial(\nabla^2 w^*)}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y}. \quad (9)$$

Для определения функции напряжений получено второе фундаментальное уравнение:

$$\nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi = 0. \quad (10)$$

Уравнения (7) и (10) составляют фундаментальную систему дифференциальных уравнений задачи изгиба пластины Рейсснера [1]:

$$D \nabla^2 \nabla^2 \tilde{w} = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla^2 q; \quad \nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi = 0. \quad (11)$$

Эта система позволяет удовлетворить трем граничным условиям на элементах контура пластины. Для общего случая элемента цилиндрической боковой поверхности пластины, заданного направлениями касательной τ и нормали n , граничные условия будут:

- на защемленной кромке $w = 0$, $\varphi_n = 0$, $\varphi_\tau = 0$;
- на свободной кромке $Q_n = 0$, $M_n = 0$, $M_{n\tau} = 0$;
- на опертой кромке $w = 0$, $M_n = 0$, $M_{n\tau} = 0$.

Функция $\psi(x, y)$ является краевым потенциалом, определяющим напряженное состояние пластины вблизи ее края или другой линии возмущения, вдоль которой нарушается непрерывность геометрии пластины, нагрузки и т. п.

Для прямоугольной пластины, изгибаемой равномерной поперечной нагрузкой, система (11) в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = -1; \quad \psi(x, y) - \alpha \nabla^2 \psi(x, y) = 0. \quad (12)$$

Здесь равномерная нагрузка направлена в отрицательную сторону оси oz ; углы поворота, моменты и перерезывающие силы примут вид:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{\partial}{\partial x} (w + \alpha_1 \nabla^2 w) - \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \varphi_y = \frac{\partial}{\partial y} (w + \alpha_1 \nabla^2 w) + \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ M_x &= - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 w \right) + \alpha_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \alpha_3; \\ M_y &= - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 w \right) - \alpha_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \alpha_3; \\ Q_x &= - \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad Q_y = - \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ M_{xy} &= (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 w - \alpha \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где w — относительный прогиб (средний прогиб, отнесенный к величине qb^4/D); координаты x , y отнесены к размеру b пластины; ψ — функция напряжений (отнесена к величине qb^2); h — относительная толщина пластины (толщина, отнесенная к размеру b пластины); $\gamma = \alpha/\beta$; $\alpha = h^2/10$; $\alpha_1 = 2\alpha/(1-\nu)$; $\alpha_2 = 2\alpha$; $\alpha_3 = \nu\alpha/(1-\nu)$.

Дискуссии о пределах применимости теорий Кирхгофа, Пуассона и Рейсснера посвящены работы В. В. Васильева [3] – [4], А. Л. Гольденвейзера [5], П. А. Жилина [6] – [8] и др. В частности, В. В. Васильев [3] отмечает, что существуют задачи, которые теория Кирхгофа не позволяет решить (например, задача о кручении пластины моментами, распределенными по двум противоположным сторонам) или дает неверные результаты (изгиб пластины параболическим штампом). Автор считает, что асимптотический метод А. Л. Гольденвейзера [5] в уточненной теории является неоднозначным и приближенным. А. Л. Гольденвейзер в сдвиговой теории разделяет напряженное состояние на внутреннее и краевое, утверждая, что система (11) неверна, так как не следует из асимптотического метода. П. А. Жилин [6] отмечает, что теория Рейсснера хорошо согласуется с трехмерной теорией упругости, а теорию Кирхгофа следует рассматривать как асимптотическое следствие теории Рейсснера. Однако непосредственное использование теории Рейсснера в численных расчетах на ЭВМ автор считает малопригодным, предлагая в явном виде выделять так называемую погранслойную часть решения.

В работе [4] обсуждаются критерии применимости классической и сдвиговой теорий. В настоящее время считается, что область применимости классической теории ограничивается задачами определения не слишком сильно изменяющегося НДС пластины в точках, достаточно удаленных от ее краев и линий возмущения. Эта теория может не действовать, когда краевые явления явно или опосредованно играют в задаче основную роль.

В сдвиговой теории пластины опорные реакции совпадают с контурными поперечными усилиями Q_x , Q_y , которые уравнивают давление на пластину, исключая какие-либо угловые силы в случае свободного опирания контура, что имеет место в теории Кирхгофа. С учетом того, что в пространственных тонкостенных конструкциях прямоугольные панели передают нагрузку на подкрепляющие элементы (силовой набор) через опорные реакции, П. А. Жилин [7] предупреждает о возможных негативных последствиях формального использования классической теории пластин в вычислительных комплексах (сеточных, МКЭ и др.).

Исторически первый вариант сдвиговой теории был предложен в работах Э. Рейсснера. Затем появились и другие уточненные теории, использующие гипотезы, в различной степени учитывающие деформацию поперечного сдвига. В настоящее время число работ, посвященных уточнению классической теории пластин, довольно велико, хотя практических результатов получено немного. Так, В. В. Васильев [4] отмечает, что все относительно корректно построенные сдвиговые теории, независимо от частных гипотез, которые находятся в их основе, приводятся к неоднородному бигармоническому уравнению для проникающей составляющей решения, аналогичному

$$D\nabla^2\nabla^2\psi = p, \quad (14)$$

где $\psi(x, y)$ — потенциал, через который выражается прогиб

$$w = \psi - \frac{D}{C}\nabla^2\psi \quad \text{при} \quad C = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

и уравнению Гельмгольца для краевой составляющей:

$$\nabla^2\psi - k^2\psi = 0 \quad \text{при} \quad k^2 = 12/h^2. \quad (16)$$

Часто в литературе пластины, рассчитанные по сдвиговой модели, называют пластинами типа Тимошенко или Рейсснера – Тимошенко и т. д., хотя приоритет принадлежит, безусловно, Э. Рейсснеру. Другие варианты сдвиговой теории предложены в работах А. Кромма, Г. Генки, Р. Миндлина, М. В. Дубинкина, А. К. Галиныша, С. А. Амбарцумяна и др.

П. А. Жилин [8] отмечает, что в уточненных теориях предложены различные значения коэффициента поперечного сдвига: $5/6$ (Э. Рейсснер), $\pi^2/12$ (Р. Миндлин), $5/(6 - \nu)$ (П. Жилин), для которых определен круг задач, где их использование дает более точные результаты.

Численных результатов расчета пластин с защемленно-свободными гранями по сдвиговым теориям весьма мало. Это объясняется сложностью краевой задачи. Представим решение двух сложных задач для прямоугольных пластин: задачи изгиба защемленной по контуру и консольной пластины под действием равномерной нагрузки. Решение получено методом бесконечной суперпозиции исправляющих функций [9], [10].

Прямоугольная пластина Рейсснера, защемленная по всему контуру, под действием равномерной нагрузки. Задача описана двумя фундаментальными уравнениями (12) и граничными условиями на каждой кромке $x = \pm \gamma/2$; $y = \pm 1/2$:

$$w = 0; \varphi_x = 0; \varphi_y = 0, \quad (17)$$

где углы поворота граней приведены в формулах (13).

Частное решение первого уравнения (12), не дающее прогибов на контуре пластины, возьмем в виде многочлена

$$w_0(x, y) = -\frac{1}{8} \left(x^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (18)$$

Эту функцию будем называть нулевым приближением. Она вызывает поворот заделанных сечений, т. е. невязки в граничных условиях (при $x = -\gamma/2$ и $y = -1/2$ они имеют противоположные знаки), которые разложим в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} \varphi_{x0} \Big|_{x=\frac{\gamma}{2}} &= -\frac{\gamma}{8} \left(y^2 - \frac{1}{4} + 2\alpha_1 \right) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{k^*} a_{k0} \cos \lambda_k y; & \varphi_{y0} \Big|_{x=\frac{\gamma}{2}} &= -\frac{\alpha_1 y}{2} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{k^*} b_{k0} \sin \lambda_k y; \\ \varphi_{x0} \Big|_{y=\frac{1}{2}} &= -\frac{\alpha_1 x}{2} = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{s^*} u_{s0} \sin \mu_s x; & \varphi_{y0} \Big|_{y=\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{8} \left(x^2 - \frac{\gamma^2}{4} + 2\alpha_1 \right) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{s^*} g_{s0} \cos \mu_s x, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\lambda_k = k\pi$; $\mu_s = s\pi/\gamma$; $k^* = (k+1)/2$; $s^* = (s+1)/2$;

$$a_{k0} = -\frac{3}{\lambda_k} \left(\frac{1}{\lambda_k^2} - \alpha_1 \right); \quad b_{k0} = \frac{2\alpha_1}{\lambda_k^2}; \quad u_{s0} = \frac{2\alpha_1}{\gamma} \frac{1}{\mu_s}; \quad g_{s0} = -\frac{1}{\gamma\mu_s} \left(\frac{1}{\mu_s^2} - \alpha_1 \right). \quad (20)$$

Эти невязки должны компенсировать исправляющие функции прогибов $w_{1n}(x, y)$, $w_{2n}(x, y)$ и напряжений $\psi_{1n}(x, y)$, $\psi_{2n}(x, y)$.

Выберем следующие исправляющие функции прогибов:

$$w_{1n} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{k^*} B_{kn} \left(x \operatorname{sh} \lambda_k x - \frac{3}{2} \operatorname{th} \tilde{\lambda}_k \operatorname{ch} \lambda_k x \right) \cos \lambda_k y; \quad (21)$$

$$w_{2n} = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{s^*} D_{sn} \left(y \operatorname{sh} \mu_s y - \frac{1}{2} \operatorname{th} \tilde{\mu}_s \operatorname{ch} \mu_s y \right) \cos \mu_s x. \quad (22)$$

Здесь B_{kn} , D_{sn} — неопределенные коэффициенты; $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k \gamma / 2$; $\tilde{\mu}_s = \mu_s / 2$, $n = 1, 2, \dots$ — номер итерации.

Обе функции (21) и (22) являются бигармоническими, а также не дают прогиба на контуре пластины и удовлетворяют условиям отсутствия двух из четырех (попарно) углов поворота заделанных сечений.

Функции напряжений будем определять в виде:

$$\psi_{1n} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{k^*} E_{kn} \operatorname{sh} \beta_k x \sin \lambda_k y; \quad \psi_{2n} = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{s^*} F_{sn} \operatorname{sh} \xi_s y \sin \mu_s x. \quad (23)$$

Здесь E_{kn} , F_{sn} — неопределенные коэффициенты; $\beta_k = \sqrt{\lambda_k^2 + 1/\alpha}$; $\xi_s = \sqrt{\mu_s^2 + 1/\alpha}$.

Функции ψ_{1n} , ψ_{2n} удовлетворяют второму уравнению (12) и, соответственно, тем же граничным условиям, что и w_{1n} , w_{2n} .

Первые две невязки (19) устраняются первой парой исправляющих функций w_{11} и ψ_{11} , при удовлетворении их граничным условиям на кромках $x \pm \gamma/2$, из которых определяются коэффициенты B_{k1} и E_{k1} .

Функции w_{11} и ψ_{11} , в свою очередь, порождают невязку на гранях $y = \pm 1/2$, которую следует разложить в ряд Фурье по $\cos \mu_s x$, переставить знаки суммирования, подставить выражения для коэффициентов B_{k1} , E_{k1} и сложить с соответствующей невязкой от начального многочлена, т. е. привести к виду

$$\Phi_{y11}|_{y=1/2} = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{s^*} g_{s1} \cos \mu_s x. \quad (24)$$

Эту и третью невязку (19) будем компенсировать второй парой исправляющих функций w_{21} , ψ_{21} за счет коэффициентов D_{s1} и F_{s1} .

В свою очередь, функции w_{21} и ψ_{21} на кромках $x \pm \gamma/2$ также порождают невязку по углу поворота этих граней $\Phi_{x21}|_{x=\gamma/2}$. Далее процесс наложения исправляющих функций (21) – (23) повторяется. В ходе итерационного процесса все невязки должны, убывая, стремиться к нулю.

Отметим, что в угловых точках пластины

$$M_x(\pm \gamma/2; \pm 1/2) = \alpha_1/2 = h^2/[10(1-\nu)], \quad (25)$$

в то время как для пластины Кирхгофа эти моменты равны нулю.

В качестве примера были получены численные результаты для квадратной пластины при значениях относительной толщины $h = 0,05; 0,1; 0,2; 0,3$ и коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$. В рядах удерживалось до 150 членов. Невязки убывали в геометрической прогрессии со знаменателем не больше $1/3$. Счет прекращался после десяти итераций, при этом вычислялись прогибы, изгибающие моменты M_x и перерезывающие силы Q_x в различных точках пластины. Вблизи контура расчетные точки сгущались, чтобы уточнить влияние концов. На рис. 1 приведены эпюры изгибающих моментов на защемленной грани. Кривая 1 соответствует пластине Кирхгофа, последующие номера присвоены пластинам Рейсснера с относительными толщинами 0,05; 0,1; 0,2; 0,3.

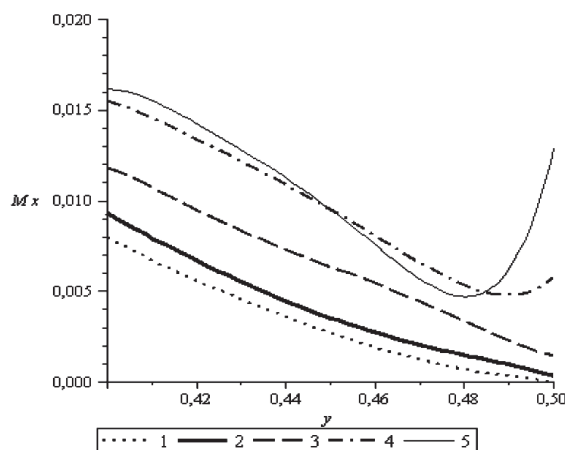


Рис. 1. Эпюры изгибающих моментов M_x/qb^2 в сечении $x \pm \gamma/2$ квадратных пластин Рейсснера

Вычисления показали, что при значениях малых относительных толщин $h \leq 1/20$ результаты для пластин Кирхгофа и Рейсснера практически совпадают. Принципиальное отличие наблюдается вблизи угловых точек контура в изгибающих моментах. Если для пластины Кирхгофа моменты в угловых точках обращаются в нуль, то для пластин Рейсснера они, согласно формуле (25), растут пропорционально квадрату относительной толщины.

Прямоугольная консольная пластина Рейсснера под действием равномерной нагрузки.

Рассмотрим прямоугольную консольную пластину $-\gamma/2 \leq x \leq \gamma/2$, $0 \leq y \leq 1$ (край $y = 0$ защемлен, остальные — свободные).

Граничные условия:

$$w = 0, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0 \text{ на грани } y = 0; \quad (26)$$

$$M_y = 0, Q_y = 0, H_{xy} = 0 \text{ на грани } y = 1; \quad (27)$$

$$M_x = 0, Q_x = 0, H_{xy} = 0 \text{ на гранях } x \pm \gamma/2. \quad (28)$$

Углы поворота, моменты и перерезывающие силы определяются формулами (13). Начальный компонент (частное решение уравнения изгиба) возьмем в виде

$$w_0(y) = -\frac{1}{24} [y^4 - 4y^3 + 6(1 - 2\alpha_4)y^2 + 24\alpha_1 y]. \quad (29)$$

Здесь $\alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$.

Функция w_0 удовлетворяет всем условиям задачи, кроме одного — первого условия (28), т. е. на гранях $x \pm \gamma/2$ порождает невязку в виде изгибающего момента, которую разложим в ряд Фурье по синусам:

$$M_{x0} \Big|_{x=\pm\frac{\gamma}{2}} = -\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \alpha_3 = \nu \left[\frac{(y-1)^2}{2} - \alpha \right] = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{k0} \sin \lambda_k y, \quad (30)$$

где $b_{k0} = \nu(1 - 2/\lambda_k^2 - 2\alpha)/\lambda_k$, $\lambda_k = k\pi/2$.

Для устранения этой основной невязки и последующих за ней вновь образуемых невязок в граничных условиях будем использовать исправляющие функции прогибов и напряжений следующего вида:

$$\begin{aligned} w_{1n} &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (A_{kn} \operatorname{ch} \lambda_k x + B_{kn} x \operatorname{sh} \lambda_k x) \sin \lambda_k y; \\ w_{2n} &= -P_n y + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left[C_{sn} \operatorname{sh} \mu_s (y-1) + D_{sn} \operatorname{ch} \mu_s (y-1) + \right. \\ &\quad \left. + E_{sn} (y-1) \operatorname{ch} \mu_s (y-1) + F_{sn} (y-1) \operatorname{sh} \mu_s (y-1) \right] \cos \mu_s x; \\ \psi_{1n} &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} G_{kn} \operatorname{sh} \beta_k x \cos \lambda_k y; \quad \psi_{2n} = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left[R_{sn} \operatorname{sh} \xi_s (y-1) + L_{sn} \operatorname{ch} \xi_s (y-1) \right] \sin \mu_s x. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь A_{kn} , B_{kn} , P_n , C_{sn} , D_{sn} , E_{sn} , F_{sn} , G_{kn} , R_{sn} , L_{sn} — неопределенные коэффициенты; $\mu_s = 2\pi s/\gamma$; $\beta_k = \sqrt{\lambda_k^2 + 1/\alpha}$; $\xi_s = \sqrt{\mu_s^2 + 1/\alpha}$.

Функции прогибов являются бигармоническими. Функции напряжений удовлетворяют второму фундаментальному уравнению (12). Функции w_{1n} , ψ_{1n} удовлетворяют также первым двум граничным условиям (26) и последним двум условиям (27). Функции w_{2n} , ψ_{2n} удовлетворяют последним двум граничным условиям (28). Слагаемое $P_n y$ в выражении для w_{2n} добавлено для того, чтобы компенсировать свободные члены разложений функций $\operatorname{ch} \lambda_k x$, $x \operatorname{ch} \lambda_k x$ в ряды Фурье по $\cos \mu_s x$ при удовлетворении граничным условиям. Каждая пара функций w_{1n} , ψ_{1n} и w_{2n} , ψ_{2n} позволяет удовлетворить условиям на параллельных гранях $x \pm \gamma/2$ и $y = 0$; 1 соответственно, но порождает невязки на двух других. В ходе итерационного процесса наложения указанных исправляющих функций невязки убывают и в пределе обращаются в нуль.

В качестве примера получены численные результаты на ЭВМ для квадратной пластины с различными значениями относительной толщины: $h = 0,02$; $0,1$; $0,2$; $0,3$; $0,4$ при $\nu = 0,3$. В рядах удерживалось до 150 членов. Процесс сходил в геометрической прогрессии со знаменателем меньше $1/2$. Счет прекращался после десяти итераций, так как невязки были прак-

тически равны нулю. Вычислялись изгибающие моменты M_y в заделке и прогибы противоположной грани.

На рис. 2 приведены эпюры изгибающих моментов M_y в заделке квадратной пластины. Кривая 1 соответствует пластине Кирхгофа. Номера кривых 2 – 6 соответствуют пластинам Рейсснера со значениями относительной толщины $h = 0,02; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$. Расчеты показывают, что при значениях малой относительной толщины $h \leq 1/20$ результаты для пластин Кирхгофа и Рейсснера практически совпадают. Различия принципиального характера проявляются лишь в изгибающих моментах M_y вблизи края заделки. Если для пластин Кирхгофа $M_y \rightarrow -\infty$ при $x \pm \gamma/2$, то для пластин Рейсснера с ростом относительной толщины вблизи края заделки образуется минимум, который смещается к середине заделки и возрастает, после чего $M_y \rightarrow +\infty$. Таким образом, деформации поперечного сдвига, учитываемые в теории Рейсснера, резко изменяют изгибающие моменты, а следовательно, и напряжения вблизи концов заделанного сечения с $-\infty$ на $+\infty$, т. е. здесь имеют место концентраторы напряжений.

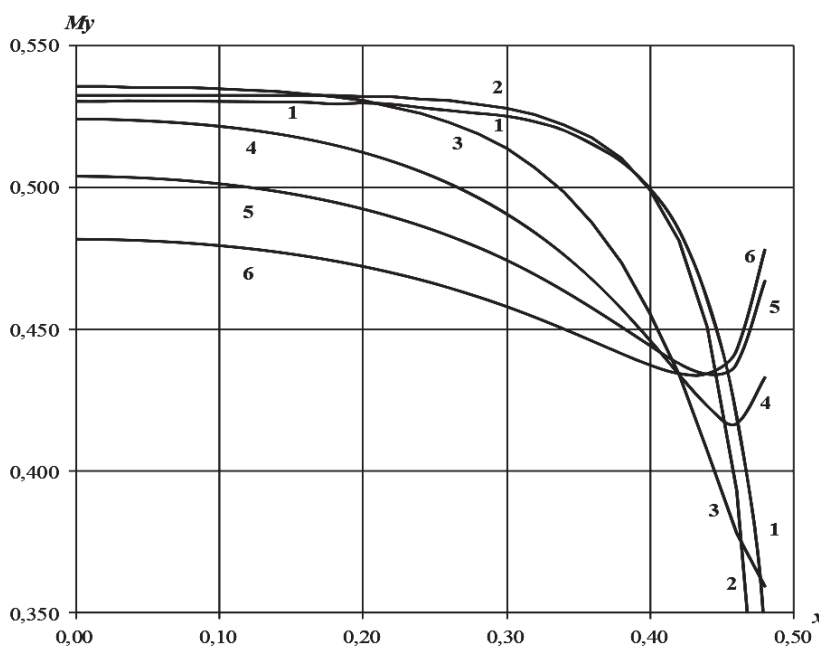


Рис. 2. Изгибающие моменты M_y/qb^2 в заделке квадратных пластин Рейсснера

Полученные результаты дают практическое представление о пределах применимости обычной и сдвиговой теории и могут быть использованы в проектно-конструкторских организациях при выполнении прочностных расчетов, а также для тестирования программ МКЭ и МКР.

Список литературы

1. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Физматгиз, 1963. — 635 с.
2. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates / E. Reissner // J. Appl. Mech. — 1945. — V. 12. — P. A 69–A 77.
3. Васильев В. В. Об асимптотическом методе обоснования теории пластин / В. В. Васильев // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 3. — С. 150–155.

4. Васильев В. В. К дискуссии по классической теории пластин / В. В. Васильев // Механика твердого тела. — 1995. — № 4. — С. 140–149.
5. Гольденвейзер А. Л. Замечание о статье В. В. Васильева «Об асимптотическом методе обоснования теории пластин» / А. Л. Гольденвейзер // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 4. — С. 150–158.
6. Жилин П. А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин / П. А. Жилин // Изв. РАН. МТТ. — 1992. — № 3. — С. 48–64.
7. Жилин П. А. О классической теории пластин и преобразовании Кельвина-Тэта / П. А. Жилин // Изв. РАН. МТТ. — 1995. — № 4. — С. 134–140.
8. Жилин П. А. Нелинейная теория тонких стержней / П. А. Жилин // Доклад на XXXIII летней школе «Актуальные проблемы механики». — СПб. — 2005. — С. 266–297.
9. Сухотерин М. В. Метод суперпозиции исправляющих функций в задачах теории пластин / М. В. Сухотерин. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. — 265 с.
10. Барышников С. О. Расчет на изгиб прямоугольной панели обшивки с центральным ребром жесткости / С. О. Барышников, М. В. Сухотерин, К. О. Ломтева // Вестник Государственного университета имени адмирала С. О. Макарова. — 2013. — № 3 (22). — С. 59–65.

УДК: 532; 532.526

Ф. Б. Нагиев,
д-р физ.-мат. наук, проф.;

З. О. Исмаилов,
дир. «Kaspian Marin Servisez Limitid»

ОБТЕКАНИЕ СУДНА ПУЗЫРЬКОВОЙ МОРСКОЙ ВОДОЙ

BUBBLE SEAWATER FLOW AROUND SHIP

В отличие от разработанных к настоящему времени методов определения сил, действующих на судно, в статье учитывается наличие мелких газовых пузырьков вблизи судна. Показано, что несмотря на малый суммарный объем, влияние их на динамику жидкости очень велико. Разработана математическая модель, учитывающая взаимодействие судового корпуса с пограничным слоем окружающей его воды с учетом наличия в ней пузырьков газа. Предложена математическая модель и аналитические методы определения параметров обтекающей судна жидкости с учетом наличия в морской воде пузырьков газа. Приведена методика численного решения системы определяющих уравнений и графические результаты вычислений. Построены зависимости компонентов скорости, распределение давления и плотности жидкости в пограничном слое вдоль внешней границы судна для разных значений объемного газосодержания.

Unlike currently developed methods to determine the forces exerted on the vessel, the article is considered the presence of fine gas bubbles near the hull. It is shown that, despite the small total volume, their effect on the dynamics of a liquid is very great. Therefore developed a mathematical model that takes into account interaction between ship hull boundary layer surrounding water, taking into account the presence of gas bubbles in it. The mathematical model and analytical methods for determining the parameters of the fluid flowing around the ship, taking into account the presence of gas bubbles in seawater, are presented. The technique of numerical solution of a system of equations and graphical results of calculations are shown. Dependences of the velocity components, pressure distribution and density of the fluid in the boundary layer along the outer edge of the vessel for different values of gas volume concentration are presented.

Ключевые слова: судно, вода, пузырьки, газ, объемное газосодержание, давление, плотность, скорость, пограничный слой.

Key words: ship, water, bubble, gas, volume concentration, pressure, density, velocity, boundary layer.