

18. Heyman J. Design of a simple steel truss / J. Heyman // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. — 2010. — Vol. 163. — No. 1. — P. 53–56.
19. Hutchinson R. G. The structural performance of the periodic truss / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2006. — Vol. 54. — Issue 4, April — P. 756–782.
20. Алпатов В. Ю. Оптимизация геометрической формы пространственно-стержневых конструкций / В. Ю. Алпатов, И. С. Холопов // Металлические конструкции. — 2009. — Т. 15. — № 1. — С. 47–57.
21. Camp C. V. Design of space trusses using modified teaching-learning based optimization / C. V. Camp, M. Farshchin // Engineering Structures. — 2014. — Vol. 62–63. — No. 3 — P. 87–97.
22. Kaveh A. Optimal structural design family by genetic search and ant colony approach/ A. Kaveh, M. Shahrouzi // Engineering Computations. — 2008. — Vol. 25. — No. 3. — P. 268–288.
23. Sonmez M. Artificial Bee Colony algorithm for optimization of truss structures / M. Sonmez // Applied Soft Computing. — Vol. 11. — 2011. — P. 2406–2418.
24. Кирсанов М. Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем / М. Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. — 2010. — № 2. — С. 60–63.

УДК 519.63: 539.384: 629.12

А. В. Анненков,
асп.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, СЖАТОЙ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

EXPLORE OF STABILITY OF CLAMPED RECTANGULAR PLATE, COMPRESSED IN ONE DIRECTION

Рассмотрена защемленная по контуру прямоугольная пластина, сжимаемая в ее плоскости равномерно распределенной нагрузкой, приложенной к двум противоположным граням. Аналитическое решение построено для определения симметричных закритических форм равновесия. Каждое решение выбирается в виде суммы двух гиперболическо-тригонометрических рядов по двум координатам. Проблема сводится к бесконечной однородной системе относительно коэффициентов рядов. Эта система в качестве параметра содержит интенсивность сжимающих усилий. Критическими усилиями считаются те, при которых коэффициенты рядов наиболее быстро устремляются в бесконечность при одном и том же числе итераций. Найдены численные результаты спектра критических нагрузок для квадратной пластины. В качестве равновесных усилий принимаются те из них, при которых коэффициенты последующих итераций практически не отличаются друг от друга. Получены графические формы равновесия пластины.

Edges of rectangular plate is compressed in its plane evenly distributed load applied to the two opposite sides. An analytical solution is constructed to determine the symmetric supercritical forms of equilibrium. Each solution is chosen as a sum of two hyperbolic-trigonometric series by two coordinates. The problem is the development of the final homogeneous system relative to the coefficients of the series. This system parameter contains the intensity of the compression forces. Critical efforts are those in which the coefficients of the series most quickly rush to infinity with the same number of iterations. Numerical results of finding the spectrum of critical loads for square plates. As the equilibrium efforts are those in which the coefficients of the subsequent iterations do not differ from each other. Achieved forms of equilibrium are presented graphically.

Ключевые слова: прямоугольная защемленная пластина, устойчивость, гиперболическо-тригонометрические ряды, критические нагрузки, формы равновесия.

Key words: rectangular clamped plate, stability, hyperbolic-trigonometric series, critical value, forms of equilibrium.

РАЗРУШЕНИЕ различных металлоконструкций (судовых, гидротехнических и др.) во многих случаях происходит из-за потери устойчивости плоских элементов обшивки, палубного настила, переборок, несущих балок и т. п. Зачастую исследователи при расчетах на устойчивость ограничиваются определением лишь первой (эйлеровой) критической нагрузки. Однако при упругой потере устойчивости несущая способность пластины не исчерпывается полностью, пластина и при дальнейшем увеличении нагрузок может оставаться в работоспособном состоянии. Поэтому практический интерес вызывает и закритическое поведение пластины под действием сжимающих усилий в её плоскости, т. е. определение спектра последующих критических нагрузок и форм равновесия. Задачей исследования является получение достоверных численных результатов о величинах критических нагрузок и формах равновесных состояний при одностороннем сжатии прямоугольной панели.

В работе [1] найдено симметричное решение задачи устойчивости прямоугольной пластины, жёстко заделанной по всем граням для случая всестороннего сжатия. Рассмотрим одностороннее сжатие равномерной нагрузкой T_x (рис. 1).

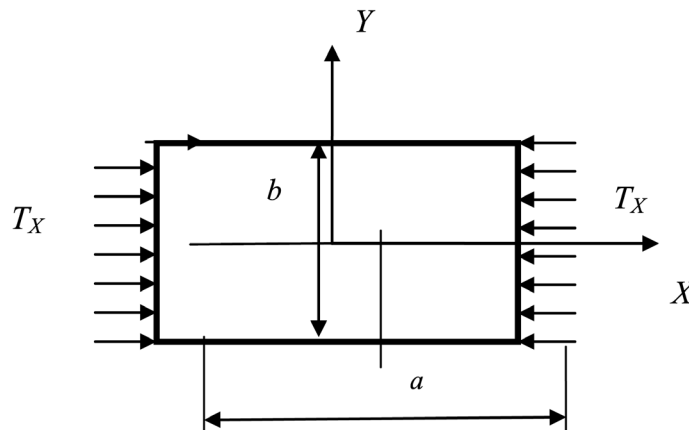


Рис. 1. Зашемленная по контуру пластина при продольной сжимающей нагрузке

Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины описывается следующим образом [2]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где ∇^2 – двумерный оператор Лапласа; w – прогиб срединной поверхности пластины; $T_x = T_x b^2 / D$ – относительные сжимающие усилия; $x = X / b$, $y = Y / b$ – безразмерные координаты, $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$ – цилиндрическая жёсткость; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; относительные размеры пластины: $-\gamma / 2 \leq x \leq \gamma / 2$, $-1 / 2 \leq y \leq 1 / 2$, $\gamma = a / b$ – отношение сторон.

Граничные условия данной задачи есть условия отсутствия прогибов и углов поворота заделанных сечений.

Постановка задачи:

- найти выражение функции прогибов $w(x, y)$, удовлетворяющее уравнению (1) и граничным условиям;
- определить значения сжимающих усилий $T_{кр.}$ (критические значения), при которых панель выходит из состояния устойчивости;
- определить значения сжимающих усилий $T_{равн.}$ (равновесные значения), при которых панель принимает новую форму устойчивого равновесия;
- найти интервалы устойчивого и неустойчивого состояния пластины.

Из бесконечного ряда критических значений и равновесных форм наиболее значимы с практической точки зрения первые две-три критические нагрузки и равновесные формы. С математической точки зрения интересно найти некоторую последовательность критических нагрузок;

полученные значения нагрузок могут быть использованы в будущем при появлении и использовании новых материалов.

Задача устойчивости защемлённой по всему периметру прямоугольной панели не имеет точного решения в замкнутой форме, поэтому некоторые исследователи ограничивались лишь поиском первого приближения. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы получить новые достоверные численные значения нагрузок.

Четное (симметричное) решение задачи представлено суммой двух рядов [1]:

$$w(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} (a_k \operatorname{ch} \alpha_k x + b_k \operatorname{ch} \beta_k x) \cos \lambda_k y + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} (c_s \operatorname{ch} \xi_s y + d_s \operatorname{ch} \eta_s y) \cos \mu_s x, \quad (2)$$

где $\lambda_k = k\pi$; $\mu_s = s\pi / \gamma$; $\tilde{k} = (k + 1) / 2$; $\tilde{s} = (s + 1) / 2$; a_k, b_k, c_s, d_s – неопределённые коэффициенты.

$$\alpha_k, \beta_k = \sqrt{0,5 \left[2\lambda_k^2 - T_x \pm \sqrt{T_x^2 - 4\lambda_k^2 T_x} \right]}; \quad (3)$$

$$\xi_s, \eta_s = \sqrt{\mu_s^2 \pm \mu_s \sqrt{T_x}}. \quad (4)$$

Знак «плюс» перед внутренним корнем относится к первому коэффициенту в левой части, «минус» – ко второму.

Отметим, что значения ранее указанных корней могут быть как действительными, так и комплексными, однако решение и в последнем случае будет действительным. Функция (2) удовлетворяет уравнению (1) и условию отсутствия прогибов заделанных сечений. Эйлера нагрузка должна быть получена именно при четном решении, так как последующая за ней форма устойчивого равновесия будет такой же, как при изгибе пластины равномерной поперечной нагрузкой.

При удовлетворении всем граничным условиям получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_k, b_k, c_s, d_s , которая затем была приведена к бесконечной однородной системе относительно одной последовательности коэффициентов a_k :

$$a_k = \frac{32T_x \lambda_k^2}{\gamma \varphi_k} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s^3}{\theta_s (\xi_s^2 + \lambda_k^2)(\eta_s^2 + \lambda_k^2)} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sqrt{T_x - 4\lambda_m^2}}{(\alpha_m^2 + \mu_s^2)(\beta_m^2 + \mu_s^2)} a_m, \quad (5)$$

где $a_m = a_k \lambda_k \operatorname{ch} \alpha_k^*$; $\varphi_k = \alpha_k \operatorname{th} \alpha_k^* - \beta_k \operatorname{th} \beta_k^*$, $\theta_s = \xi_s \operatorname{th} \xi_s^* - \eta_s \operatorname{th} \eta_s^*$;

$$\alpha_k^* = \alpha_k \gamma / 2, \quad \beta_k^* = \beta_k \gamma / 2, \quad \xi_s^* = \xi_s / 2, \quad \eta_s^* = \eta_s / 2.$$

Остальные коэффициенты рядов (2) выражаются через a_k :

$$b_k = -a_k \operatorname{ch} \alpha_k^* / \operatorname{ch} \beta_k^*; \quad d_s = -c_s \operatorname{ch} \xi_s^* / \operatorname{ch} \eta_s^*; \quad c_s = -d_s \operatorname{ch} \xi_s^* / \operatorname{ch} \eta_s^*.$$

Представление бесконечной системы в форме (5) позволяет находить коэффициенты a_k методом последовательных приближений, полагая, например, в качестве начального приближения все $a_m = 1$. Система (5) в качестве параметра содержит величину сжимающих усилий T_x , которая должна быть подобрана такой, чтобы получить нетривиальные решения системы. Если значения сжимающих усилий T_x находятся в зоне устойчивости пластины, то итерационный процесс приводит к стандартному решению. Начиная с некоторого значения T , наблюдается неограниченный рост коэффициентов a_k , что означает наступление интервала неустойчивого состояния пластины. Вычисления показали, что интервал неустойчивости, сопровождающийся ростом прогибов пластины, может быть достаточно протяжённым и включать в себя критическую нагрузку или две-три критические нагрузки в одной зоне, которая даёт резкий бесконечный рост прогибов панели. В интервале неустойчивого состояния бесконечная система (5) даёт расходящееся решение с меньшей или большей скоростью расхождения.

Для организации вычислительного процесса была составлена программа в *Maple*. В качестве примера рассчитывалась квадратная пластина ($\gamma = 1$). Число членов в рядах было равно 59 (от этого числа зависит и размер укороченной системы (5)). Этого количества членов было достаточно

для достижения точности вычислений до пятого знака. На печать выводились все коэффициенты для каждой итерации. Зоны устойчивого и неустойчивого состояния, критические и равновесные нагрузки определялись достаточно быстро перебором значений T_x с учётом поведения коэффициентов a_k по итерациям.

Отметим, что при любой нагрузке из интервала неустойчивого состояния пластина может потерять устойчивость при длительном её воздействии, однако вблизи концов интервала это маловероятно (здесь следует учитывать силы внутреннего трения и кратковременность воздействия). В качестве критических значений усилий принимались наиболее опасные значения, т. е. те, при которых коэффициенты с наибольшей скоростью устремлялись к бесконечности при одинаковом числе итераций.

Значения T_x , при которых получалось нетривиальное конечное решение (т. е. когда соответствующие коэффициенты последующих итераций практически не отличались друг от друга), принимались в качестве равновесных значений, а найденные при этих значениях формы прогибов поверхности пластины представляли собой формы ее равновесия.

Так как решение выполнялось в виде суммы двух гипербола-тригонометрических рядов по двум координатам (2), которые моделирует свободно опёртые параллельные кромки, то кроме критических и равновесных значений, также имеются особые значения усилий. Это значения $T_x = (\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2 / \mu_s^2$, при которых знаменатели формул (2) обращаются в нуль, но они, как показали исследования, являются лишь началом (или концом) зоны неустойчивого состояния защемленной пластины. Приведем первые пять особых значений нагрузки для квадратной панели:

$$4\pi^2 \approx 39,478; 100 \pi^2 / 9 \approx 109,662; 27,04 \pi^2 \approx 266,875; 36\pi^2 \approx 355,305; 46,24\pi^2 \approx 456,370.$$

Значения нескольких первых критических и равновесных нагрузок для квадратной пластины, а также диапазоны её устойчивого и неустойчивого состояния при симметричной деформации приведены в таблице (самая первая критическая нагрузка – «эйлерова» нагрузка).

**Критические и равновесные усилия при одностороннем сжатии
квадратной пластины для симметричного решения**

Диапазон усилий T_x	$T_{кр}$	Форма пластины	$T_{равн}$
0 – 39,478	–	Устойчивая плоская	–
39,478 – 99,426	66,553 ; 84,923	Неустойчивая	–
99,426	–	Равновесная	99,426
99,426 – 109,662	–	Устойчивая плоская	–
109,662 – 192,112	117,624; 179,552	Неустойчивая	–
192,112	–	Равновесная	192,112
192,112 – 266,875	–	Устойчивая плоская	–
266,875 – 274,7	271,058	Неустойчивая	–
274,7 – 355,305	–	Устойчивая плоская	–
355,305 – 456,370	375,879; 391,41; 449,464	Неустойчивая	–
456,370 – 470,822	–	Устойчивая плоская	–
470,822	–	Равновесная	470,822

На рис. 2 приведены первые три чётные формы равновесного состояния квадратной пластины, равномерно сжатой вдоль оси Ox .

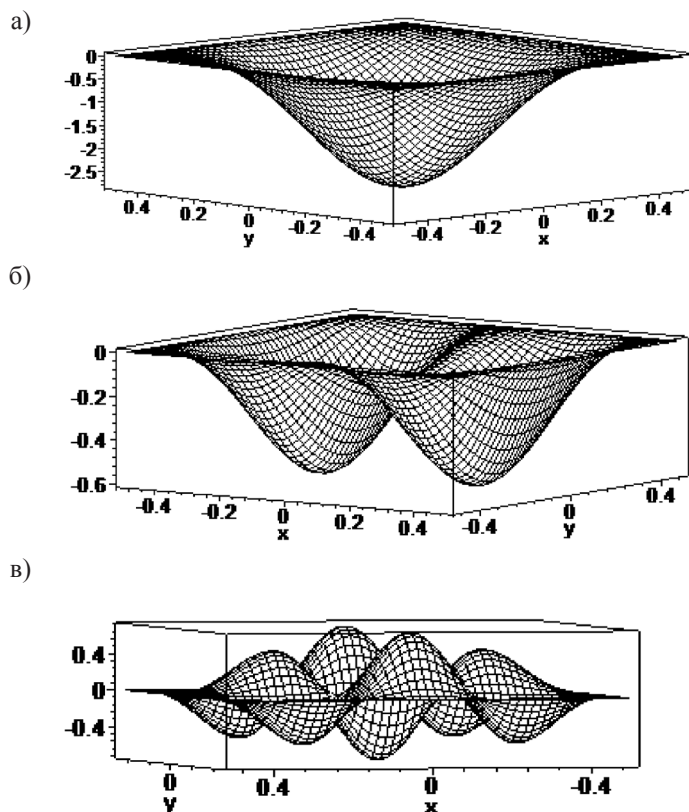


Рис. 2. Формы равновесного состояния квадратной пластины при одностороннем сжатии:

$$a - T_{\text{равн.1}} = 99,426; \text{ б} - T_{\text{равн.2}} = 192,112; \text{ в} - T_{\text{равн.3}} = 470,822$$

Первая форма равновесного состояния имеет одну выпучину (рис. 2 а) и соответствует виду изогнутой поверхности пластины от действия равномерной поперечной нагрузки, вторая – две выпучины (рис. 2 б), третья – имеет четыре выпучины в одну сторону и пять выпучин в другую (рис. 2 в).

В работе [3] получено значение «эйлеровой» нагрузки для квадратной пластины, равное $10,07\pi^2 \approx 99,387$. Оно практически совпадает с полученным в настоящей работе первым равновесным усилием 99,426, а найденное «эйлерово» значение получилось существенно ниже, чем в [3] – 66,553. За ним следует второе критическое усилие 84,923. Причина, на наш состоит в том, что в работе [3] в качестве критического усилия принималось то, которое обеспечивает равенство энергии деформации при изгибе и работы внешних сил. Правильнее считать его именно равновесным усилием. Критическое состояние сопровождается «хлопком» – резким изменением формы пластины, что в рамках данной теории означает бесконечный рост её прогибов. Физически при «эйлеровом» значении, равном 66,553, форма потери устойчивости пластины подобна приведенной на рис. 2 а. При достижении второго критического усилия, равного 84,923, пластина хлопком меняет направление выпученности на противоположное и затем с ростом усилий приходит к равновесной форме при значении, равном 99,426.

В публикации [4] «эйлерова» нагрузка составила $32\pi^2/3 \approx 105,27$, что является еще более завышенным приближенным значением. Оно получено методом Галеркина при удержании одного члена аппроксимирующего ряда. В других работах [5]–[8], посвященных этой задаче, отметим, что авторы также ограничивались отысканием только первой «эйлеровой» нагрузки.

В работе [9] рассматривалась задача сложного изгиба, когда кроме сдвигающих продольных нагрузок к пластине была приложена и равномерная поперечная нагрузка. Для одностороннего сжатия получены следующие значения критических усилий (первые два): 66,5; 117,5. Они практически совпадают с первым и третьим критическим значением, полученным в насто-

ящей работе. Отсутствие аналога второму критическому значению 84,923 объясняется наличием поперечной нагрузки, которая исключает возможность повторного «хлопка» в другую сторону. Поэтому можно сделать вывод о том, что наличие поперечной нагрузки практически не влияет на величину критических усилий в рамках теории тонких пластин Кирхгофа. Первое равновесное усилие, приведенное в работе [9], равно 100, также практически совпадает с найденным в настоящей работе. В данной работе рассмотрено только симметричное решение. Получены «эйлерова» критическая нагрузка и последующие четные критические нагрузки при условии упругих деформаций, равновесные усилия, а также найдены интервалы устойчивого и неустойчивого состояния пластины.

Для полной картины необходимо рассмотреть еще антисимметричное решение, а также симметричное по одной координате и антисимметричное по другой. Это, безусловно, дополнит характер закритического состояния пластины для более высоких значений сжимающей нагрузки. В работе [10] эти решения получены для двусторонних сжимающих усилий.

Выводы

Полученные результаты позволяют с высокой точностью найти критические продольные сжимающие нагрузки T_x для жёстко защемленных по всем краям прямоугольных пластин с различными значениями соотношения сторон, а также находить следующие за критическими формы равновесия и зоны устойчивого и неустойчивого состояний пластины. Вычислительный алгоритм может быть использован в практических расчетах на устойчивость плоских прямоугольных элементов судовых, гидротехнических и других конструкций.

Список литературы

1. Сухотерин М. В. Устойчивость сжатых панелей обшивки судна / М. В. Сухотерин, Т. П. Кныш, Л. В. Анненков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2013. — № 2. — С. 51–58.
2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Либроком, 2009. — 640 с.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
4. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. — М.: Машиностроение, 1978. — 312 с.
5. Андрианов И. В. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин / И. В. Андрианов, В. В. Данишевский, А. О. Иванков. — Днепрпетровск: ПГАСА, 2010. — 216 с.
6. Даревская Е. В. Устойчивость защемленной по контуру прямоугольной пластинки / Е. В. Даревская // Строительная механика и расчет сооружений. — 1982. — № 3. — С. 31–35.
7. Lanzo A. D. Asymptotic post-buckling analysis of rectangular plates by HC finite elements / A. D. Lanzo, G. Garcea, R. Casciaro // International Journal for numerical methods in engineering. — 1995. — Vol. 38. — P. 2325–2345.
8. Yamaky N. Post-buckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression / N. Yamaky // Journal Appl. Mech. ASME. — 1959. — Vol. 26. — P. 407–414.
9. Барышников С. О. Прочность, устойчивость, колебания плоских элементов судовых конструкций / С. О. Барышников, М. В. Сухотерин. — СПб.: Судостроение, 2012. — 167 с.
10. Сухотерин М. В. Определение спектра критических нагрузок и форм равновесия сжатых панелей обшивки корпуса судна / М. В. Сухотерин, Е. В. Потехина, Л. В. Анненков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2014. — Вып. 2. — С. 44–52.