

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВОДОПРОПУСКНЫХ СООРУЖЕНИЯХ

ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR CALCULATING FLUID FLOW IN THE CULVERTS

В данной работе проводится сравнительный анализ двух существенно различных моделей двумерного течения жидкости. Первая — это модель Лаврентьева, которая описывает отрывные течения идеальной жидкости с постоянной завихренностью. В ней предполагается, что зона вихревого течения отделена от основного потока некоторой нулевой линией тока. Нахождение линии раздела включает в себя последовательное решение уравнения Пуассона с корректируемой линией раздела областей. Расчет проводится с помощью комплекса программ, выполненного автором в системе Maple, базирующегося на методе граничных элементов. Вторая модель — модель течения идеальной жидкости, основанная на решении уравнений неразрывности, сохранения импульса и энергии. Расчет выполняется методом конечных элементов. Полученные результаты значений таких важных параметров, как давление и скорость жидкости, рассчитанные двумя методами, согласованы между собой.

In this study, we make a comparative analysis of the two fundamentally different models of two-dimensional fluid flow. The first — model of Lavrent'ev, describes separated flows of an ideal fluid with constant vorticity. It is assumed that the area of vortex flow is separated from the main flow by zero stream line. Finding the separation line include a consistent solution of Poisson's equation with the correctable line between regions. The calculation is performed by using a complex of programs, executed by the author in the Maple. Program based on the boundary element method. The second model — flow model of ideal fluid, based on the solution of the equations of continuity, energy and momentum conservation. The calculation is performed by finite element method. The obtained values of important parameters such as pressure, fluid velocity, calculated by two methods are agreed.

Ключевые слова: идеальная жидкость, вихревое течение, модель Лаврентьева.
Key words: ideal fluid, vortex flow, Lavrent'ev model.

Введение

В задачах математического моделирования течения потока по обходным галереям судоходного шлюза в процессе его наполнения и опорожнения существенное значение имеют простые и надежные модели, подтверждающие опытные данные и натурные измерения.

В работе предлагается две модели расчета, основанные на уравнении Гельмгольца. Основным уравнением течения жидкости в форме Гельмгольца в плоском стационарном случае является уравнение

$$V_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + V_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega, \quad (1)$$

где ω — завихренность, удовлетворяющая уравнению

$$\omega = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\Delta \psi. \quad (2)$$

В модели Лаврентьева [1] предполагается, что зона отрыва отделена от основного течения некоторой нулевой линией тока [2] – [5]. Внутри зоны отрыва течение предполагается вихревым с постоянной завихренностью

$$\Delta \psi = \begin{cases} 0, & \psi > 0 \\ \omega, & \psi < 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Несмотря на то, что условие постоянства завихренности является грубым приближением к движению вязкой жидкости, оно является точным для предельного стационарного течения вязкой жидкости, когда вязкость стремится к нулю [6], [7]. Поскольку линия отрыва неизвестна, то для ее нахождения применяется итерационный метод решения, такой, что в каждой итерации требуется решить отдельное уравнение Пуассона. Данная схема решения уравнения (3) позволяет в полной мере воспользоваться теорией граничных интегральных уравнений. С одной стороны, решение достаточно быстро сходится, его результатом является построение зоны отрыва течения, определение значений функции тока, при помощи которой находятся основные параметры: давление и скорость жидкости [8] – [10]. С другой стороны, расчет параметров течения невязкой жидкости на базе вариационного метода конечных элементов существенно более сложный. Тем не менее, выполненные расчеты оказались согласованными с расчетами на базе комплекса программ автора (свидетельства о регистрации в Реестре программ для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности № 2014616781 от 03 июля 2014 г. и № 2013613636 от 11 апреля 2013 г.) на основе модели Лаврентьева.

Основная часть

Расчетная область представляет собой прямоугольник, а плоский затвор — поперечный прямолинейный выступ, расположенный на верхней границе (рис. 1).

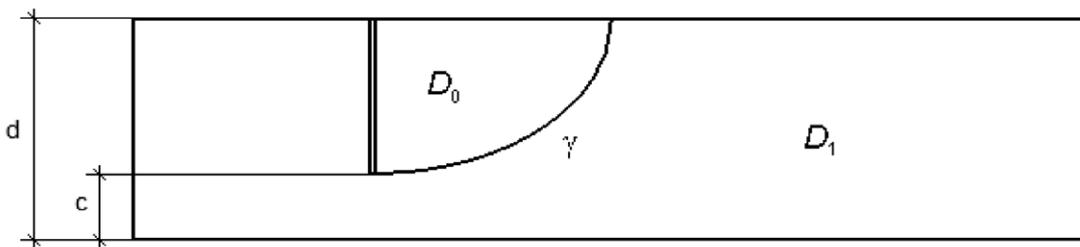


Рис. 1. Общий вид камеры с выступом и движения жидкости

Плоское течение жидкости в рассматриваемой области, согласно модели Лаврентьева, распадается на два независимых течения:

- *потенциальное течение* в области D_1 , ограниченной стенками камеры, линиями входа и выхода потока и струей γ , срывающейся с нижнего края затвора;
- *вихревое течение* с постоянной завихренностью ω , $\omega > 0$ в области D_0 , дополняющей D_1 до всей области D .

Кривую γ надо подобрать так, чтобы она была линией тока и чтобы поле скоростей оставалось непрерывным всюду в области D . Для функции тока получим уравнение Пуассона с разрывной правой частью:

$$\Delta\psi = \begin{cases} 0, & \psi < Q \\ -\omega, & \psi > Q \end{cases}, \quad (4)$$

с заданными граничными условиями ψ_0 :

- на нижней стенке галереи функция тока равна нулю;
- на верхней стенке и затворе функция тока равна расходу жидкости Q ;
- на входе и выходе функция тока изменяется непрерывно;
- $\psi = Q$ на γ , так как кривая γ является линией тока.

Алгоритм нахождения линии раздела представлен в виде блок-схемы (рис. 2) и включает последовательное решение уравнения Пуассона с корректируемой линией раздела областей. На рис. 3 приведен интерфейс программы, на котором указаны параметры области: «Высота галереи», «Длина участка галереи перед затвором», «Длина участка галереи за затвором», «Относительная высота поднятия затвора», «Ширина затвора», «Расход жидкости»,

«Исходная величина завихренности», «Максимальная погрешность вычислений», «Количество узлов на участке», «Корректировка величины завихренности». В результате работы программы получаем картину линий уровня функции тока и графики скоростей течения перед затвором и за ним, а также график результирующего давления.

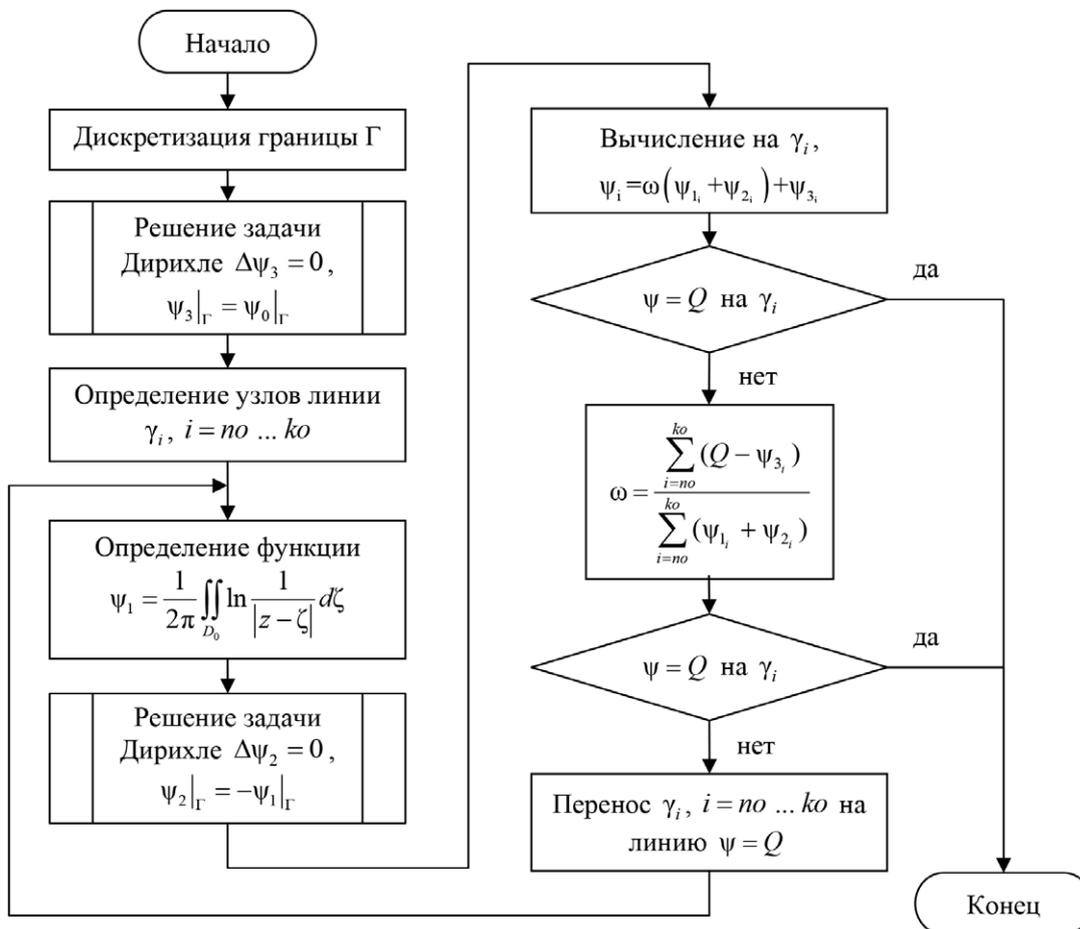


Рис. 2. Блок-схема алгоритма

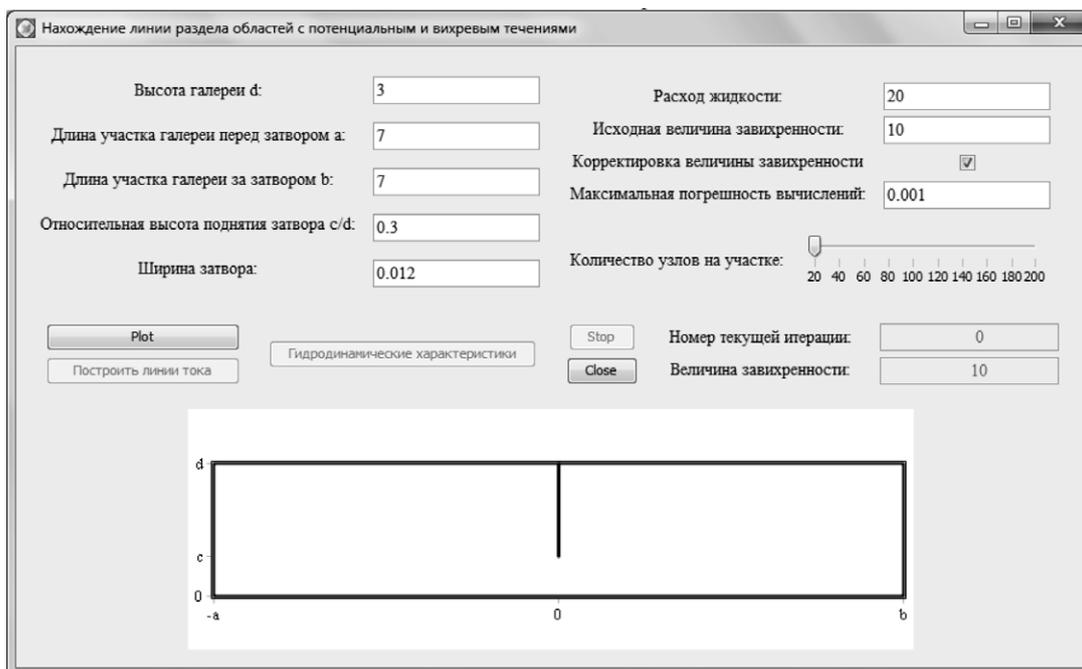


Рис. 3. Интерфейс программы

Приведем результаты расчетов. На рис. 4, *а* приведены линии уровня функции тока, полученные методом граничных элементов на основе модели Лаврентьева для расчета вихревых областей за препятствиями, на рис. 4, *б* — линии, полученные методом конечных элементов на основе решения уравнений неразрывности, сохранения импульса и энергии. В результате выполнения программы на основе метода граничных элементов и метода конечных элементов за затвором четко прослеживается *отрыв потока*. Вихревая область, полученная во второй модели, заполняет весь доступный объем, в то время как вихревая область, полученная в программе на основе метода граничных элементов — в первой модели, имеет конечные размеры.

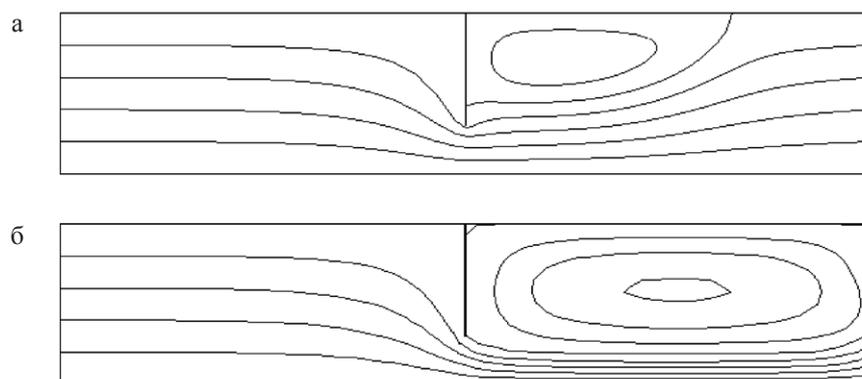


Рис. 4. Линии уровня функции тока:
а — метод граничных элементов; *б* — метод конечных элементов

Сравним численные значения параметров движения. На рис. 5 представлены скорости течения при различных разрезах рассматриваемой области. На рис. 5 и 6 жирной линией показан алгоритм на основе метода граничных элементов, тонкой линией — алгоритм на основе метода конечных элементов.

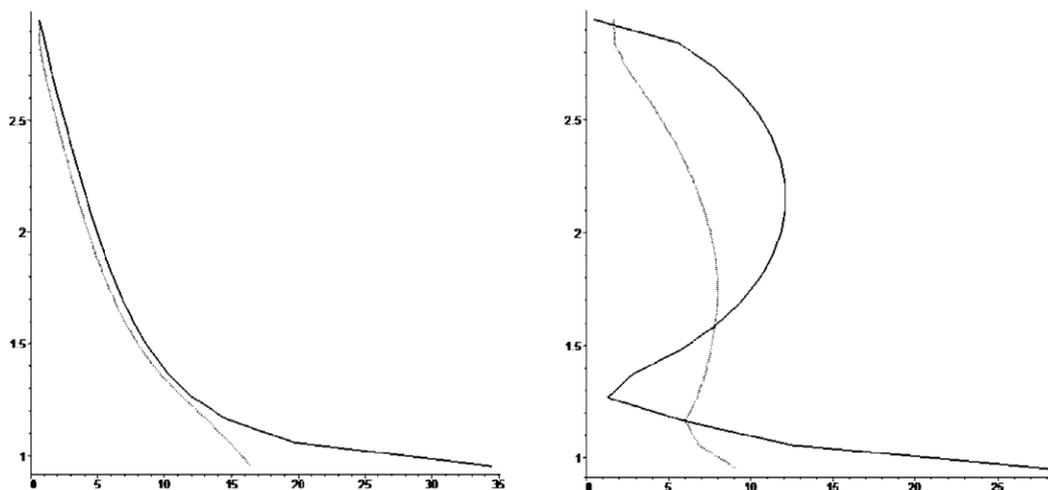


Рис. 5. График скорости течения:
а — скорость перед затвором; *б* — скорость за затвором

Наибольший интерес представляют скорости течения жидкости вблизи затвора. Можно считать, что применение моделей для вычисления скоростей течения у затвора дает схожий результат, но вычислительные средства модели на основе метода конечных элементов существенно сложнее. На рис. 6 приведен график результирующего давления на затвор. Как и в случае скоростей, результаты согласованы и подтверждают те же выводы: схожий результат и сложность реализации метода конечных элементов.

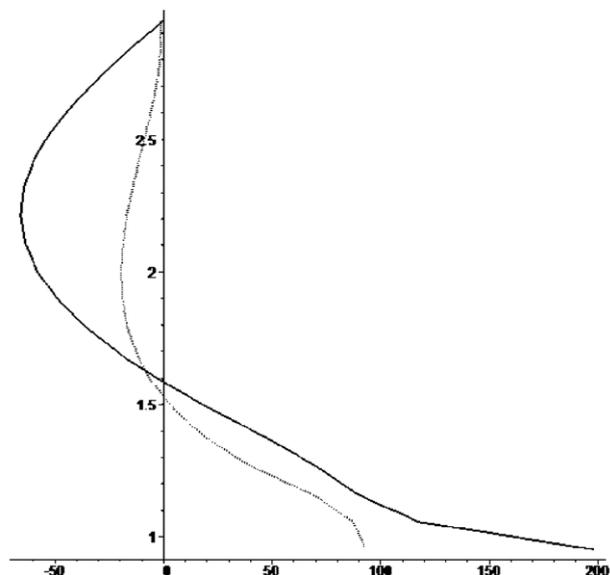


Рис. 6. График результирующего давления

Выводы

Программная реализация алгоритма, основанного на применении метода граничных элементов, проще по сравнению с реализацией алгоритма, основанного на методе конечных элементов, в частности в части генерации конечно-элементной сетки для вычислений. В методе граничных элементов дискретизации подвергается лишь граница области. Результаты расчета по обеим схемам согласованы и показывают, что при обтекании затвора потоком невязкой жидкости за ним возникает зона вихревого течения, давления на затвор имеют разнонаправленный характер, поэтому следует учитывать момент сил давления.

Список литературы

1. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 416 с.
2. Вайнштейн И. И. Модель М. А. Лаврентьева о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости / И. И. Вайнштейн, П. С. Литвинов // Вестник СибГАУ. — 2009. — № 3(24). — С. 7–9.
3. Потапов Д. К. Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика / Д. К. Потапов // Математические заметки. — 2010. — Т. 87. — № 2. — С. 262–266.
4. Васин А. В. Определение линии раздела областей вихревых течений / А. В. Васин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10, Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2013. — № 1. — С. 3–10.
5. Васин А. В. Определение линии раздела областей с потенциальным и вихревым течениями / А. В. Васин, О. А. Тимофеева // Журнал Университета водных коммуникаций. — 2012. — № 2 (14). — С. 8–13.
6. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Л. Прандтль. — Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 572 с.
7. Гольдштик М. А. Вихревые потоки / М. А. Гольдштик. — Новосибирск: Наука (Сиб. отд.), 1981. — 368 с.
8. Vasin A. V. Simulation of the Dynamic Loads and Calculation of Plane Lock Bypass Galleries. / A. V. Vasin, D. P. Goloskokov // Proceedings of ICCTPEA-2014, Saint-Petersburg, Russia, June 30 – July 04, 2014. — P. 197–198.
9. Васин А. В. Расчет плоских затворов судоходных шлюзов на динамическое воздействие / А. В. Васин, Д. П. Голоскоков // Межд. науч.-практ. конф. ИТОН – 2014: материалы конф. и тр. семинара / под ред. Ю. Г. Игнатьева. — Казань: Изд-во «Фолиант», 2014.
10. Васин А. В. Математическое моделирование динамических нагрузок на гидрозатворы / А. В. Васин // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2013: материалы науч. конф., 15 – 20 апреля 2013 г. — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2013. — С. 36–40.