ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА ИМЕНИ АДМИРАЛА С. О. МАКАРОВА

УДК 532.511:51-72

А. В. Коптев

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЭКРАНИРУЮЩЕГО ЭФФЕКТА

Предложен аналитический метод решения плоской задачи обтекания кругового цилиндра установившимся потоком идеальной среды при наличии экранирующей поверхности. Метод основан на решении краевой задачи для уравнений установившегося движения идеальной несжимаемой среды при граничных условиях непроницаемости вдоль контуров обтекаемого цилиндра и экранирующей поверхности. В качестве определяющих уравнений использовался интеграл уравнений Эйлера для 2D установившегося движения идеальной несжимаемой среды. Решение задачи реализовано с применением асимптотических методов. В результате получены новые формулы, определяющие подъемную силу и лобовое сопротивление обтекаемого тела как функции исходных параметров, справедливые при малых размерах обтекаемого тела по сравнению с размерами набегающего потока. С помощью пакета стандартных программ Maple найдены значения этих величин при различных исходных параметрах и с учетом эффекта экранирования.

Ключевые слова: обтекание, круговой цилиндр, идеальная несжимаемая жидкость, экранирующая поверхность, уравнение, интеграл, подъемная сила, лобовое сопротивление, экранирующий эффект.

1. Экранопланы и экранолеты. По международной классификации (ИМО) экраноплан относится к многорежимным морским судам. Экраноплан — это перспективное транспортное средство, для которого в основном режиме эксплуатации движение происходит над водной поверхностью без контакта с ней, существенно используя при этом эффект экранирования («эффект экрана») [1] – [5]. Для экранолета возможен дополнительно и режим движения на значительном удалении от поверхности («самолетный режим»).

Основной принцип движения экраноплана можно сформулировать как выигрыш в подъемной силе за счет экранирующего эффекта. Экранирующий эффект, или эффект экранирования, был обнаружен в 30-х гг. XX в. результате экспериментальных исследований. Он состоит в том, что при движении потока в узком пространстве между обтекаемым телом и экраном (водной или земной поверхностью) возникает значительное увеличение подъемной силы, и движение может осуществляться в более экономичном режиме при значительной экономии топлива.

Экраноплан способен передвигаться на большие расстояния и на малой высоте над водной (земной или ледовой) поверхностью со скоростями порядка 400 – 600 км/ч. Достоинства экранопланов и экранолетов как поисковых, спасательных и экономичных транспортных средств очевидны. Производство, освоение и внедрение таких аппаратов органично вписываются в Морскую доктрину, представленную Президентом РФ летом 2015 г. Интерес к таким средствам передвижения проявляется со стороны различных Министерств РФ — Министерства транспорта, МЧС и Минвостокразвития. Однако серийное производство экранопланов и экранолетов в РФ пока не начато. Для организации такого производства требуются современные технологии, высокоточное оборудование и применение специальных конструкционных материалов. Немаловажен и теоретический аспект. Теория экранирующего эффекта на сегодняшний день разработана недостаточно. Теоретические исследования в этой области заметно отстают от потребностей практики.

Необходимо всестороннее теоретическое изучение экранирующего эффекта, которое позволит получить количественные зависимости, расчетные формулы и в конечном итоге позволит более точно рассчитывать основные элементы конструкции [6] – [8].

В данной работе предлагается рассмотрение теоретического аспекта проблемы с помощью модели обтекания кругового цилиндра при наличии экранирующего эффекта. Предполагается, что набегающий поток формируется идеальной несжимаемой средой (газом или жидкостью) заданной плотности. Экранирующий эффект создается за счет горизонтальной плоскости, расположенной внизу, на некотором удалении от обтекаемого тела. Таким образом, предлагается рассматривать классическую задачу обтекания кругового цилиндра потоком идеальной несжимаемой среды при существенных уточнениях — обтекание происходит при наличии экранирующей плоскости и при этом допускается наличие завихренности набегающего потока.

Основной целью является вычисление подъемной силы (lift force) и лобового сопротивления (drag) и исследование влияния на эти характеристики экранирующего эффекта. Также поставим задачей выявить количественные зависимости основных характеристик от расстояния до экранирующей плоскости и получить аналоги известных формул типа Чаплыгина – Жуковского для данного случая.

2. Математическая постановка задачи. Задачу предлагается рассматривать в декартовой системе координат, центр которой совмещен с центром окружности, получающейся в результате сечения цилиндра перпендикулярной плоскостью. Ось OX направим перпендикулярно оси цилиндра и параллельно экранирующей плоскости, ось OY — перпендикулярно экранирующей плоскости, вверх. Все дальнейшие выкладки будем вести в безразмерных переменных, при следующем выборе масштабов. Пусть L и U_0 соответственно — масштабы длины и скорости, ρU_0^2 — масштаб давления. Окружность, задающая контур обтекаемого тела, определяется уравнением $x^2 + y^2 = r^2$, где $r = \dfrac{R}{L}$ — безразмерный радиус цилиндра. Величины ρ, U_0 и r считаем заданными положительными параметрами. Экранирующую плоскость полагаем расположенной параллельно главной оси цилиндра на глубине $h = \dfrac{H}{L}$. Такая плоскость задается уравнением $y = -h$, где h — некоторый положительный параметр, удовлетворяющий ограничению $h > r$.

К рассмотрению предлагается плоская задача, когда движение одинаково во всех плоскостях перпендикулярных оси цилиндра. В отличие от работы [9], в предлагаемой постановке допускается наличие завихренности набегающего потока. В качестве основных неизвестных, как это и принято при рассмотрении плоской задачи обтекания, полагаем u, v, p, где u и v — скорости потока, соответственно продольная и поперечная, p — давление. В качестве вспомогательной величины рассмотрим функцию тока $\Psi_1(x, y)$ [10] – [13].

Решение задачи будем строить в виде разложений по степеням $x^n \cdot y^m$, где n и m — целые неотрицательные числа, такие что $n + m \le N$, а N — номер приближения. Предварительные вычисления показывают, что для получения нетривиальных зависимостей достаточно рассмотреть пятое приближение N=5, когда функция тока задается выражением

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{n=0}^{5}\sum_{m=0}^{5-n} a_{nm} x^n y^m. \tag{1}$$

Величины a_{nm} в формуле (1) — некоторые коэффициенты, не зависящие от x и y. В правой части (1) число таких коэффициентов равно 21. Скорости u, v определяются через функцию тока согласно выражениям

$$u = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}. \tag{2}$$

Ясно, что при N=5 скорости u и v будут задаваться в виде многочленов четвертой степени относительно $x^n \cdot y^m$. Старшим коэффициентом разложения для продольной скорости u является a_{01}. Положим, для простоты, $a_{01} = 1$. Это соответствует тому, что размерное значение этой величины равно U_0, где U_0 определяет масштаб скорости.

Задачу будем рассматривать при следующих граничных условиях. Условие первое — условие непротекания вдоль контура обтекаемого тела [12] – [13]. Это условие требует, чтобы вдоль контура обтекаемого тела вектор скорости был направлен по касательной. Для нашего случая данное условие можно задать равенством

$$(ux + vy)\big|_{x^2+y^2=r^2} = 0. \tag{3}$$

Второе граничное условие — условие непротекания на экранирующей поверхности. Это условие соответствует тому, что на экранирующей поверхности вектор скорости направлен вдоль нее. Для нашего случая это условие сводится к соотношению

$$v(x,-h)=0. \tag{4}$$

Потребуем также выполнимости дополнительного, третьего граничного условия. Оно получается из рассмотрения выражения $u(x, y)$ при $x = -1$, т. е. $u(-1, y)$. Это выражение задает профиль продольной скорости в сечении $x = -1$. В рамках рассматриваемого приближения его можно представить в виде

$$u(-1,y)=1+\delta_1 y+\delta_2 y^2+\delta_3 y^3+\delta_4 y^4,$$

где δ_i — некоторые коэффициенты разложения.

Чтобы избежать парадокса Даламбера [12] – [13], потребуем отсутствия симметрии профиля по y. Для этого достаточно потребовать, чтобы нечетные коэффициенты разложения были отличны от нуля:

$$\delta_1\neq 0,\quad \delta_3\neq 0. \tag{5}$$

Так что в качестве третьего граничного условия потребуем выполнимости ограничений (5).

В качестве определяющих уравнений рассмотрим 2D уравнения Эйлера для установившегося движения идеальной несжимаемой среды [12] – [13]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x};\quad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y}; \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{7}$$

где Φ — обозначает потенциал внешних сил. Для нашего случая $\Phi = gy$, где g — ускорение свободного падения.

Решение и все последующие вычисления значительно упростятся, если использовать не уравнения (6) непосредственно, а первый интеграл этих уравнений. Вывод и описание первого интеграла уравнений Навье – Стокса для движения вязкой несжимаемой среды и уравнений Эйлера, как частного случая, приведены в работах [14] – [18]. Для случая 2D движения первый интеграл уравнений Эйлера сводится к трем соотношениям:

$$p+gy+\frac{U^2}{2}+d=0, \tag{8}$$

$$u^2-v^2=-\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial y^2},\qquad uv=-\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x\partial y}, \tag{9}$$

где Ψ_2 — обозначает новое ассоциированное неизвестное, U и d — соответственно модуль скорости и диссипативный член, вычисляемые по формулам:

$$U=\sqrt{u^2+v^2},\quad d=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial y^2}\right). \tag{10}$$

Таким образом, в качестве основной задачи, определяющей математическую постановку, имеем граничную задачу для уравнений (7), (9) при граничных условиях (3 – 5). Решение этой задачи позволит определить скорости u, v и неизвестное Ψ_2. Давление определяется затем по соотношению (8) с учетом (10).

3. Решение. В рамках пятого приближения скорости u и v задаются в виде многочленов четвертой степени относительно $x^n \cdot y^m$. Выражения для скоростей получаются из (2) с учетом (1), и они заведомо удовлетворяют уравнению неразрывности (7). Подберем коэффициенты a_{nm} так, чтобы изначально удовлетворить граничным условиям (3 – 5). Первым удовлетворим условию (3). Выражения для u и v подставим в левую часть (3) и, приведя подобные члены, приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях $x^n \cdot y^m$. Получим равенства, которые дают новые ограничения на коэффициенты:

$$a_{05} = -\frac{1}{r^2}(a_{03} + \frac{a_{01}}{r^2}),\quad a_{50} = -\frac{1}{r^2}(a_{30} + \frac{a_{10}}{r^2}),\quad a_{41} = -\frac{1}{r^2}(a_{21} + \frac{a_{01}}{r^2}),\quad a_{14} = -\frac{1}{r^2}(a_{12} + \frac{a_{10}}{r^2});$$

$$a_{32} = -\frac{1}{r^2}(a_{12} + a_{30} + 2\frac{a_{10}}{r^2}),\quad a_{23} = -\frac{1}{r^2}(a_{21} + a_{03} + 2\frac{a_{01}}{r^2}),\quad a_{31} = a_{13} = -\frac{a_{11}}{r^2};$$

$$a_{04} = \frac{a_{22}}{2} - \frac{1}{2r^2}(a_{02} - a_{20}),\quad a_{40} = \frac{a_{22}}{2} + \frac{1}{2r^2}(a_{02} - a_{20}).$$

С учетом этих ограничений выражения для скоростей принимают вид

$$u = 1 + a_{11}x + 2a_{02}y + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2 - \frac{a_{11}}{r^2}x^3 + 2a_{22}x^2y - \frac{3a_{11}}{r^2}xy^2 + 2\left(a_{22} + \frac{a_{20} - a_{02}}{r^2}\right)y^3 -$$

$$\left(\frac{a_{21}}{r^2} + \frac{1}{r^4}\right)x^4 - \frac{2}{r^2}\left(a_{12} + a_{30} + \frac{2a_{10}}{r^2}\right)x^3y - \frac{3}{r^2}\left(a_{21} + a_{03} + \frac{2}{r^2}\right)x^2y^2 - \frac{4}{r^2}\left(a_{12} + \frac{a_{10}}{r^2}\right)xy^3 - \frac{5}{r^2}\left(a_{03} + \frac{1}{r^2}\right)y^4; \quad (11)$$

$$v = -\Big(a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + 2\left(a_{22} + \frac{a_{02} - a_{20}}{r^2}\right)x^3 - 3\frac{a_{11}}{r^2}x^2y + 2a_{22}xy^2 - \frac{a_{11}}{r^2}y^3 -$$

$$\frac{5}{r^2}\left(a_{30} + \frac{a_{10}}{r^2}\right)x^4 - \frac{4}{r^2}\left(a_{21} + \frac{1}{r^2}\right)x^3y - \frac{3}{r^2}\left(a_{12} + a_{30} + \frac{2}{r^2}\right)x^2y^2 - \frac{2}{r^2}\left(a_{21} + a_{03} + \frac{2}{r^2}\right)xy^3 - \frac{1}{r^2}\left(a_{12} + \frac{a_{10}}{r^2}\right)y^4\Big). \quad (12)$$

Выражения (11) – (12) удовлетворяют и уравнению неразрывности (7), и условию (3), которое соответствует условию непротекания на поверхности обтекаемого тела. Выражения (11) – (12) содержат девять пока не определенных коэффициентов a_{nm}.

Далее рассмотрим условие (4). Левая часть (4) есть многочлен четвертой степени относительно x. Для выполнимости равенства (4) достаточно приравнять нулю все коэффициенты при x^n, где $n = 0, 1, \ldots, 4$. Это приводит к пяти дополнительным ограничениям:

$$a_{30} + \frac{a_{10}}{r^2} = 0,\qquad \frac{1}{2}(a_{22} + \frac{a_{02} - a_{20}}{r^2}) + \frac{h}{r^2}(a_{21} + \frac{1}{r^2}) = 0,\qquad a_{30} + \frac{ha_{11}}{r^2} - \frac{h^2}{r^2}(a_{12} + a_{30} + \frac{2a_{10}}{r^2}) = 0;$$

$$a_{20} - ha_{21} + h^2a_{22} + \frac{h^3}{r^2}(a_{21} + a_{03} + \frac{2}{r^2}) = 0,\qquad a_{10} - ha_{11} + h^2a_{12} + \frac{h^3a_{11}}{r^2} - \frac{h^4}{r^2}\left(a_{12} + \frac{a_{10}}{r^2}\right) = 0. \quad (13)$$

Чтобы удовлетворить условию (5), нужно воспользоваться выражением (11) при $x = -1$ и рассмотреть первые два нечетных члена разложения по координате y. В результате получаем еще два дополнительных равенства:

$$a_{02} - a_{12} + a_{22} + \frac{1}{r^2}\left(a_{12} + a_{30} + \frac{2a_{10}}{r^2}\right) = \delta_1;\qquad \frac{1}{2}(a_{22} - \frac{a_{02} - a_{20}}{r^2}) + \frac{1}{r^2}(a_{12} + \frac{a_{10}}{r^2}) = \delta_3, \quad (14)$$

где δ_1, δ_3 — некоторые отличные от нуля параметры.

Таким образом, для того чтобы удовлетворить всем граничным условиям, достаточно разрешить систему семи линейных уравнений (13) – (14) относительно девяти оставшихся коэффициентов a_{nm} и получающиеся соотношения использовать в (11) – (12). Предварительный анализ показывает, что мы имеем превышение числа неизвестных над числом уравнений. Три из девяти неизвестных останутся неопределенными. В качестве таких базовых коэффициентов предлагается выбрать a_{10}, a_{11}, a_{02}. Остальные коэффициенты однозначно определяются через них. Решение системы (13) – (14) приводит к следующим результатам:

$$a_{30} = -\frac{a_{10}}{r^2},\quad a_{21} = \frac{a_{02}r^2}{h} - \frac{a_{11}r^2}{h^2} + \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)\cdot\frac{a_{10}}{h} + \left(\frac{\delta_3}{2} - \delta_1\right)\cdot\frac{r^2}{2h} - \frac{1}{r^2},\quad a_{12} = \frac{a_{11}}{h} - \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right)\cdot\frac{a_{10}}{h^2};$$

$$a_{22} = -a_{02} + \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\frac{a_{11}}{h} + \frac{1 - r^2 - h^2}{r^2h^2}a_{10} + \frac{\delta_1}{2},\quad a_{20} = \left(1 + r^2\right)\cdot\left(a_{02} - \frac{a_{11}}{h}\right) + \frac{1 + r^2 + h^2}{h^2}\cdot a_{10} + \left(\delta_3 - \delta_1\right)\frac{r^2}{2};$$

$$a_{03} = -\frac{a_{02}r^2}{h^3} + \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)\cdot\frac{a_{11}}{h^2} - \frac{r^2 + h^2}{h^5}a_{10} - \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)\cdot\frac{r^2\delta_3}{4h} - \frac{r^2 + h^2}{r^2h^2}. \quad (15)$$

Таким образом, выражения (11) – (12), с учетом (15), изначально удовлетворяют и уравнению неразрывности (7), и граничным условиям (3) – (5). Эти выражения содержат в качестве параметров величины r, h, δ_1, δ_3, и в них фигурируют три пока не определенных коэффициента a_{10}, a_{11}, a_{02}. Для их определения обратимся к уравнениям (9). В этих уравнениях, наряду с u, v, фигурирует также и ассоциированное неизвестное Ψ_2. Это неизвестное также зададим в виде степенного разложения

$$\Psi_2(x,y)=\sum_{n=0}^{5}\sum_{m=0}^{5-n} b_{nm}x^n y^m, \tag{16}$$

где b_{nm} представляют некоторые, пока не определенные коэффициенты.

Подставляя (16) в (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x^n y^m$ в левых и правых частях, получаем систему линейных неоднородных уравнений относительно b_{nm}. Анализ этой системы приводит к следующему выводу. Система допускает решение только в том случае, если выполнены условия совместности. В рамках рассматриваемого приближения условия совместности сводятся к трем уравнениям относительно базовых коэффициентов a_{10}, a_{11}, a_{02}. Эти уравнения следующие:

$$-\frac{a_{11}a_{10}}{h}+a_{10}^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{a_{11}}{3}+\frac{2a_{10}}{3h}=0; \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&a_{02}^2\frac{2r^2}{h}\left(\frac{3}{h^2}-1\right)\left(1+r^2\right)+a_{11}^2\frac{1}{h}\left(1+\frac{5}{h^2}+r^2\left(\frac{4}{h^2}+\frac{6}{h^4}\right)+r^4\left(-\frac{2}{h^2}+\frac{6}{h^4}\right)\right)+a_{10}^2\left(\left(1+h^2\right)\left(-\frac{2}{h^3}+\frac{6}{h^5}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{r^2}{h^3}\left(-4+\frac{10}{h^2}+\frac{6}{h^4}\right)+\frac{r^4}{h^5}\left(-2+\frac{6}{h^2}\right)\right)+a_{11}a_{10}\left(\frac{2}{r^2}-\frac{5}{h^2}-\frac{12}{h^4}+\frac{2r^2}{h^2}\left(2-\frac{7}{h^2}-\frac{3}{h^4}\right)+\frac{4r^4}{h^4}\left(1-\frac{3}{h^2}\right)\right)+\\
&+a_{02}a_{11}\frac{2}{h^2}\left(-3-r^2\left(1+\frac{6}{h^2}\right)+r^4\left(2-\frac{6}{h^2}\right)\right)+a_{02}a_{10}\frac{2}{h^2}\left(-1+\frac{3}{h^2}+r^2\left(-2+\frac{4}{h^2}+\frac{6}{h^4}\right)+r^4\left(-\frac{2}{h^2}+\frac{6}{h^4}\right)\right)+\\
&+\left(3\delta_1+\delta_3+r^2\frac{3(\delta_3-\delta_1)}{h^2}+r^4\frac{(\delta_3-\delta_1)}{h}\left(\delta_3-\frac{\delta_1}{2}\right)+r^6\frac{3\delta_3}{4h^3}(\delta_3-\delta_1)\right)+a_{02}\left(\frac{8}{r^2}-12+\frac{6}{h^2}+\right.\\
&\left.+r^2\left(\frac{15}{2h}+\frac{\delta_1}{h}-\frac{\delta_3}{2h}\right)+\frac{r^4}{h}\left(2\delta_1-1{,}5\delta_3+\frac{3\delta_3}{h^2}-\frac{3\delta_1}{h^2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2h^2}\right)+\frac{3r^6}{2h^2}\right)+a_{11}\left(-\frac{10}{hr^2}+\frac{6}{h}-\frac{6}{h^3}+r^2\left(-\frac{3\delta_3}{2h^4}-\frac{5\delta_3}{2h^2}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{5\delta_1}{2h^2}-\frac{3\delta_3}{2h^4}\right)+\frac{r^4}{h^2}\left(-2\delta_1-\frac{5\delta_3}{h^2}+\frac{3\delta_1}{h^2}\right)\right)+a_{10}\left(\frac{14-2h^2}{r^2h^2}+\frac{4}{h^2}+\frac{6}{h^4}+r^2\left(\frac{\delta_1-1{,}5\delta_3}{h}+\frac{5\delta_3-7\delta_1}{2h^3}+\frac{6}{h^4}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{r^4}{h^3}\left(2\delta_1-1{,}5\delta_3+\frac{3\delta_3}{h^2}-\frac{3\delta_1}{h^2}\right)\right)=0;
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&a_{10}^2\frac{\left(-14+2r^2+2h^2\right)}{r^2h^2}+\frac{a_{11}^2}{h^2}\left(-3\left(1+\frac{r^2}{h^2}\right)+r^2\right)+\frac{a_{02}a_{11}}{h}\left(2-r^2+\frac{3r^2}{h^2}\right)+2a_{02}a_{10}\left(-\frac{4}{r^2}+1-\frac{1}{h^2}\right)+\\
&+\frac{a_{11}a_{10}}{h}\left(\frac{14}{r^2}-3+\frac{3}{h^2}+\frac{r^2}{h^2}\left(\frac{3}{h^2}-1\right)\right)+a_{11}\left(-\frac{2}{r^2}+\frac{3}{h^2}+\frac{r^2}{2h}(\delta_3+\delta_1)+\frac{3r^4}{4h^3}\right)-a_{10}(\delta_1+3\delta_3)=0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Уравнения (17) – (19) нелинейные, что является следствием нелинейности исходных уравнений (9). Решение в общем виде уравнений (17) – (19) представляется достаточно сложным. На данном этапе предлагается применить асимптотический подход и тем самым значительно упростить вычисления. Асимптотические методы широко используются в задачах гидроаэромеханики. Достаточно вспомнить известную формулу Н. Е. Жуковского для подъемной силы в случае безвихревого обтекания профиля потоком идеального газа [13]. Применительно к задачам обтекания с учетом экранирования асимптотический подход использовался в работе [19].

Для нашего случая предлагается использовать разложения по малому параметру r^2, где $r^2 \to 1$ (или $\frac{R^2}{L^2} \to 1$). В результате будут получены формулы, справедливые для случая малых размеров обтекаемого тела по сравнению с размерами набегающего потока. Разложения a_{nm} по степеням r^2 зададим в виде

$$a_{nm} = a_{nm}^{(0)} + a_{nm}^{(1)} r^2 + a_{nm}^{(2)} r^4 + \ldots + a_{nm}^{(k)} r^{2k} + \ldots, \tag{20}$$

где $a_{nm}^{(k)}$ — коэффициенты разложения. Эти величины зависят от параметров h, δ_1, δ_3, но не зависят от r^2. Для получения приближенных формул достаточно найти главные члены асимптотических разложений, а именно — члены, соответствующие k=0 и k=1. Подставим (20) в уравнения (170 – (19), определяющие a_{11}, a_{02}, a_{10} и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $(r^2)^j$ в обеих частях. Для значений $j = -1$ и $j = 0$ получаем следующие соотношения:

$$a_{11}^{(0)} a_{10}^{(0)} = -4a_{02}^{(0)} + \frac{5}{h} \cdot a_{11}^{(0)} + a_{10}^{(0)} \frac{(3h^2 - 5)}{h^2}; \tag{21}$$

$$a_{10}^{(0)^2} = \frac{3h^2}{3 - h^2} \left(a_{11}^{(0)} \frac{15 - h^2}{3h^2} - a_{02}^{(0)} \frac{4}{h} + a_{10}^{(0)} \frac{7h^2 - 15}{3h^3} \right); \tag{22}$$

$$a_{02}^{(0)} a_{10}^{(0)} = -a_{11}^{(0)} \frac{4}{\left(3 - h^2\right)} + a_{02}^{(0)} \frac{4}{\left(3 - h^2\right)} + a_{10}^{(0)} \frac{(58 - 21h^2)}{8h\left(3 - h^2\right)}. \tag{23}$$

Система (21) – (23) представляет квазилинейную систему относительно $a_{11}^{(0)}$, $a_{02}^{(0)}$, $a_{10}^{(0)}$ с квадратичными нелинейностями в левых частях. Уравнения (21) – (23) существенно проще уравнений (17) – (19). Для разрешения уравнений (21) – (23) предлагается подход, основанный на следующих рассуждениях. Все члены в левых частях пропорциональны $a_{10}^{(0)}$. Обозначим эту величину, как χ. Тогда (21) – (23) можно рассматривать как систему трех линейных однородных уравнений относительно $a_{11}^{(0)}$, $a_{02}^{(0)}$, $a_{10}^{(0)}$ с главным определителем Δ, зависящим от h и χ. Известно, что система однородных линейных уравнений имеет нетривиальные решения, только если $\Delta = 0$. Причем, таких решений будет бесконечное множество. Для нашего случая имеем равенство нулю определителя третьего порядка:

$$\left| \begin{pmatrix} -\chi h^2 + 5h & -4h^2 & 3h^2 - 5 \\ -32h & -\chi 8h(3 - h^2) + 32h & 58 - 21h^2 \\ h(15 - h^2) & 12h^2 & -\chi h(3 - h^2) + 7h^2 - 15 \end{pmatrix} \right| = 0. \tag{24}$$

Равенство (24) приводит к кубическому уравнению относительно χ. Каждый корень этого уравнения дает возможное значение неизвестного $a_{10}^{(0)}$. Неизвестные $a_{11}^{(0)}$, $a_{02}^{(0)}$ определяются через него посредством простых линейных операций. Таким образом, будут найдены $a_{11}^{(0)}$, $a_{02}^{(0)}$, $a_{10}^{(0)}$ и, значит, построены нулевые члены асимптотики (20) при $r^2 \to 0$. Для того чтобы построить следующие члены асимптотики, нужно найти величины $a_{11}^{(1)}$, $a_{02}^{(1)}$, $a_{10}^{(1)}$. Вычисления приводят к следующей системе для их определения:

$$a_{11}^{(1)} \left(\frac{1}{3} - \frac{a_{10}^{(0)}}{h} \right) + a_{10}^{(1)} \left(\frac{2}{3h} - \frac{a_{11}^{(0)}}{h} + 2a_{10}^{(0)} \left(\frac{3 - h^2}{3h^2} \right) \right) = 0;$$

$$a_{11}^{(1)} \left(\frac{7a_{10}^{(0)}}{h} - 1 \right) - 4a_{02}^{(1)} a_{10}^{(0)} + a_{10}^{(1)} \left(\frac{2a_{10}^{(0)}\left(h^2 - 7\right)}{h^2} + a_{11}^{(0)} \frac{7}{h} - 4a_{02}^{(0)} \right) = -\frac{a_{10}^{(0)2}}{h^2} + \frac{3}{2h^2} a_{11}^{(0)2} - \frac{a_{02}^{(0)} a_{11}^{(0)}}{h} + \frac{3}{2h^3}\left(h^2 - 1\right) a_{11}^{(0)} a_{10}^{(0)} +$$

$$\frac{1 - h^2}{h^2} a_{02}^{(0)} a_{10}^{(0)} - \frac{3}{2h^2} a_{11}^{(0)} + a_{10}^{(0)} \left(\delta_1 + 3\delta_3\right);$$

$$a_{11}^{(1)} \left(a_{10}^{(0)} - \frac{5}{h} \right) + 4a_{02}^{(1)} + a_{10}^{(1)} \left(a_{11}^{(0)} - 3 + \frac{5}{h^2} \right) = -a_{11}^{(0)2} \frac{h^2 + 6}{3h^3} + a_{10}^{(0)2} \frac{h^4 - 2h^2 - 3}{h^5} + a_{11}^{(0)} a_{10}^{(0)} \frac{5h^2 + 6}{2h^4} + \frac{3}{h^2} a_{02}^{(0)} a_{11}^{(0)} +$$

$$a_{02}^{(0)} a_{10}^{(0)} \frac{h^2 - 3}{h^3} + a_{02}^{(0)} 3 \frac{(2h^2 - 1)}{h^2} + a_{11}^{(0)} 3 \frac{(1 - h^2)}{h^3} - a_{10}^{(0)} \frac{3}{h^4} - \frac{3\delta_1 + \delta_3}{2}. \tag{25}$$

Следуя описанной процедуре, последовательно разрешим систему (21) – (23) относительно $a_{10}^{(0)},\ a_{11}^{(0)},\ a_{02}^{(0)}$, а затем и систему (25) относительно $a_{11}^{(1)},\ a_{02}^{(1)},\ a_{10}^{(1)}$. В результате будут определены, с точностью до членов первого порядка, величины a_{nm}, а затем и b_{nm}. Тогда по формулам (11) – (12) и (8) определятся и основные неизвестные u, v и p. Это позволит, в свою очередь, вычислить и все другие интересующие нас величины.

4. Подъемная сила и лобовое сопротивление. Исходные общие формулы для вычисления этих важнейших характеристик при обтекании тела потоком несжимаемой среды приведены в [12] – [13]. Для нашего случая их можно представить в виде:

$$F_y = -\int_0^{2\pi} p\left(r\cos\varphi; r\sin\varphi\right)\cdot r\sin\varphi d\varphi;\quad F_x = -\int_0^{2\pi} p\left(r\cos\varphi; r\sin\varphi\right)\cdot r\cos\varphi d\varphi. \qquad (26)$$

В формулах (26) интегрирование производится по углу φ, вдоль контура окружности радиуса r в пределах от нуля до 2π. Подынтегральное выражение определяется функцией $p(x, y)$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Функция $p(x, y)$ находится согласно уравнению (8), с учетом (10), (16).

Последовательные преобразования по формулам (26) с учетом (8) приводят к следующим результатам. В рамках рассматриваемого приближения подъемная сила F_y и сила лобового сопротивления F_x, отнесенные к величине $\rho\pi r^2 L^2 U_0^2$, определяются выражениями:

$$\frac{F_y}{\rho\pi r^2 L^2 U_0^2} = g + \frac{1}{2}a_{11}^{(0)}a_{10}^{(0)} + \frac{1}{4}a_{02}^{(0)} + a_{11}^{(0)}\left(\frac{7}{4h} - \frac{3}{4}\right) + a_{10}^{(0)}\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) +$$

$$+r^2\left\{\frac{a_{11}^{(0)2}}{2h}\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{h^2}\right) - \frac{a_{11}^{(0)}a_{10}^{(0)}}{2h^2}\left(\frac{21}{4} + \frac{3}{h^2}\right) + \frac{3a_{02}^{(0)}a_{10}^{(0)}}{2h}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{a_{10}^{(0)2}}{2h}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2h^2} + \frac{3}{h^4}\right) - \frac{3a_{11}^{(0)}a_{02}^{(0)}}{2h^2} + \right.$$

$$+ a_{02}^{(0)}\left(1 - \frac{3}{2h^2}\right) - \frac{a_{11}^{(0)}}{2h}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{h^2}\right) + a_{10}^{(0)}\left(\frac{3}{2h^4} + \frac{9}{2h^2} - \frac{2}{h}\right) + \left(\frac{7}{8}\delta_3 - \frac{11}{8}\delta_1\right) + \frac{1}{2}a_{11}^{(0)}a_{10}^{(1)} + \frac{1}{2}a_{10}^{(0)}a_{11}^{(1)} -$$

$$\left.\frac{17}{12}a_{02}^{(1)} - a_{11}^{(1)}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4h}\right) + a_{10}^{(1)}\left(1 - \frac{1}{h^2}\right)\right\}; \qquad (27)$$

$$\frac{F_x}{\rho\pi r^2 L^2 U_0^2} = a_{02}^{(0)}a_{10}^{(0)} + a_{10}^{(0)2}\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4h^2}\right) + \frac{5}{4}a_{11}^{(0)} + r^2\left\{-\frac{3}{4h}a_{11}^{(0)}a_{02}^{(0)} + \frac{5}{8h^2}a_{11}^{(0)2} - \right.$$

$$\frac{a_{11}^{(0)}a_{10}^{(0)}}{8h}\left(17 + \frac{13}{h^2}\right) + \frac{a_{02}^{(0)}a_{10}^{(0)}}{4}\left(5 + \frac{3}{h^2}\right) + a_{10}^{(0)2}\left(\frac{5}{4h^2} + \frac{1}{h^4}\right) + \frac{3}{8h^2}a_{11}^{(0)} + a_{10}^{(0)}\left(\frac{1}{8}\delta_3 - \frac{5}{8}\delta_1\right) +$$

$$\left. + a_{02}^{(0)}a_{10}^{(1)} + a_{10}^{(0)}a_{02}^{(1)} + a_{10}^{(0)}a_{10}^{(1)}\left(3 - \frac{7}{2h^2}\right) + \frac{5}{4}a_{11}^{(1)}\right\}. \qquad (28)$$

Произведем краткое описание и анализ этих формул. Полученные формулы (27) – (28) являются новыми, они позволяют вычислять F_y и F_x как функции определяющих параметров. Данные формулы, как и известные формулы Жуковского, имеют асимптотический характер. Формулы (27) – (28) справедливы при малых значениях квадрата радиуса обтекаемого тела r^2. Правые части формул представлены суммами двух групп слагаемых. Первые группы есть результат нулевого приближения по r^2. Слагаемые первых групп зависят от значений базовых коэффициентов в нулевом приближении, т. е. зависят от $a_{10}^{(0)},\ a_{11}^{(0)},\ a_{02}^{(0)}$. Эти слагаемые дают основной вклад в величины F_y и F_x. Слагаемые вторых есть результат первого приближения по r^2, они пропорциональны r^2. Эти слагаемые зависят также и от значений базовых коэффициентов в первом приближении, т. е. от величин $a_{10}^{(1)},\ a_{11}^{(1)},\ a_{02}^{(1)}$.

В правых частях присутствуют в качестве параметров также величины h, δ_1, δ_3. Величина h представляет расстояние от обтекаемого тела до экранирующей плоскости и во многом определяет степень влияния экранирующего эффекта на F_x и F_y. Поскольку h присутствует лишь в знаменателях правых частей, то очевидно, что при уменьшении величины h влияние эффекта экранирования будет возрастать.

Параметры δ_1, δ_3 определяют зависимость степени несимметричности набегающего потока на F_x и F_y. Чем более несимметричен набегающий поток, тем больше по модулю величины δ_1, δ_3. Поскольку в правых частях формул (27) – (28) величины δ_1 и δ_3 присутствуют с разными знаками, то их влияние на F_x и F_y неоднозначно.

Кроме перечисленных величин в правой части формулы (26) для F_y присутствует и g. Эта величина есть безразмерное ускорение свободного падения. Она представляет относительный вклад от архимедовой силы в выражении для F_y. При обтекании воздушной средой со скоростями порядка 500 (км/ч) вклад от этой величины по сравнению с другими слагаемыми мал.

5. Результаты расчетов. При некоторых значениях определяющих параметров по формулам (26) – (28) были произведены расчеты F_x и F_y. Расчеты были выполнены для случая $r = 0{,}2$, что соответствует предположению о малости размера цилиндра по сравнению с размерами набегающего потока. Безразмерное расстояние до экранирующей плоскости принималось как h =2,0; h =1,0 и h =0,5. Эти значения соответствуют расстоянию до экранирующей плоскости равному 10R; 5R и 2,5R соответственно. Рассматривая F_x и F_y при значениях h в указанном порядке, т. е. при убывании h, представляется возможным проследить влияние экранирующего эффекта на F_x и F_y. Чем меньше h, тем ожидаемо больше это влияние. Значения параметров δ_1 и δ_3 при расчетах были выбраны как $\delta_1 = \delta_3 = 4$. Это соответствует средней степени несимметричности набегающего потока.

Предварительно в качестве вспомогательных величин были вычислены значения базовых коэффициентов a_{11}, a_{02}, a_{10}. Значения нулевого и первого членов асимптотических разложений $a_{nm}^{(0)}$ и $a_{nm}^{(1)}$, которые присутствуют в правых частях формул (27) – (28), были найдены с помощью стандартных программ пакета Maple. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения базовых коэффициентов

$h \setminus a_{nm}$	$a^{(0)}_{11} \setminus a^{(1)}_{11} r^2$	$a^{(0)}_{02} \setminus a^{(1)}_{02} r^2$	$a^{(0)}_{10} \setminus a^{(1)}_{10} r^2$
2,0	4,158 \ –0,014	2,138 \ –0,042	0,766 \ 0,022
1,0	2,000 \ 0,100	1,500 \ 0,065	1,000 \ 0,020
0,5	2,588 \ 3,007	4,873 \ –10,929	0,326 \ –0,620

Каждая строка таблицы соответствует определенному значению h. Численные значения коэффициентов представлены в столбцах таблицы. Для удобства анализа и расчета по формулам (27) – (28) значения коэффициентов представлены в виде дроби, в числителе которой дано $a_{nm}^{(0)}$, а в знаменателе — $a_{nm}^{(1)} \cdot r^2$.

Результирующие значения лобового сопротивления и подъемной силы, вычисленные согласно (27) – (28) при указанных значениях определяющих параметров, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Лобовое сопротивление и подъемная сила как функции расстояния до экранирующей плоскости

$h \setminus F_i$	F_x	F_y
2,0	7,263	3,477
1,0	3,830	3,219
0,5	3,455	19,574

Каждая строка таблицы соответствует определенному значению h в убывающем порядке от h = 2,0 до h =0,5. Значения F_x и F_y представлены в столбцах таблицы. Эти значения есть результат вычисления F_y и F_x по асимптотическим формулам с точностью до членов порядка r^2, т. е. с учетом и нулевого, и первого приближений. При изменении величины h от 2,0 до 0,5 можно проследить следующие закономерности. Величина F_y возрастает от значения 3,477 при h=2,0 до 19,574 при h =0,5. Т. е. при уменьшении расстояния до экранирующей поверхности в четыре раза имеем увеличение подъемной силы в 5,63 раза. Таким образом, имеем увеличение подъемной силы в результате экранирующего эффекта при приближении к экранирующей поверхности.

Еще одно проявление экранирующего эффекта можно проследить, если рассмотреть изменение величины F_x в зависимости от h. Величина F_x убывает от значения 7,263 при h =2 до 3,455 при h =0,5. Таким образом, при уменьшении расстояния до экранирующей плоскости в четыре раза лобовое сопротивление уменьшается в 2,10 раза.

Выводы. Предлагаемая модель и методика расчета позволяют на практике определять подъемную силу и лобовое сопротивление при обтекании цилиндра потоком идеальной несжимаемой среды при наличии экранирования. Получены формулы, позволяющие определять эти величины, как функции определяющих параметров.

Представляется возможным также определить поле скоростей и давление вблизи обтекаемого тела и оценить влияние экранирующего эффекта на эти характеристики.

Теоретическое обоснование получила высказанная ранее гипотеза о возрастании подъемной силы при приближении обтекаемого тела к экранирующей поверхности. Также получило теоретическое обоснование убывание лобового сопротивления при приближении обтекаемого тела к экранирующей поверхности.

В основном режиме движения экраноплана и то, и другое являются благоприятствующими факторами. Таким образом, теоретически доказано, что выгода от эффекта экранирования получается двойная. С одной стороны, увеличивается подъемная сила, а с другой — уменьшается лобовое сопротивление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белавин Н. И.* Экранопланы / Н. И. Белавин. — Л.: Судостроение, 1977. — 232 с.
2. *Маскалик А. И.* Крылатые суда России: история и современность / А. И. Маскалик, Р. А. Нагапетян, А. Я. Вольфензон. — СПб.: Судостроение, 2006. — 240 с.
3. *Маскалик А. И.* Экранопланы. Особенности теории и проектирования / А. И. Маскалик [и др.]. — СПб.: Судостроение, 2000. — 320 с.
4. *Петров Г. Ф.* Гидросамолеты и экранопланы России: 1910 – 1999 / Г. Ф. Петров. — М.: Русавиа, 2000. — 248 с.
5. *Небылов А. В.* Российские экранопланы: новые перспективы в международном сотрудничестве / А. В. Небылов, В. А. Небылов // Русский инженер. — 2013. — № 4 (39). — С. 33–36.
6. *Болотин А. А.* Математическое моделирование движения экраноплана при разгоне /А. А. Болотин // Труды НГТУ. — 2013. — № 5 (102). — С. 283–286.
7. *Nebylov A. V.* Wing-in-ground Effect Vehicles: Modern Concepts of Design and New Role of Automatic Control / A. V. Nebylov, V. A. Nebylov // 3-rd European Conference for Aero-Space Sciences (EUCASS), EUCASS Association. — 2009. — Pp. 1–10.
8. *Lange R. H.* Large Wing-in-Ground Effect Transport Aircraft / R. H. Lange, J. W. Moor // Journal of aircraft. — 1980. — Vol. 17. — № 4. — Pp. 260–266.
9. *Фролова К. В.* Несжимаемое потенциальное течение около цилиндра при наличии циркуляции и экранирующей поверхности / К. В. Фролова, В. А. Фролов // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Ч. 6. Аэромеханика и летательная техника: материалы 52-й науч. конф. МФТИ. — М.: Жуковский, 2009. — С. 31–33.
10. *Milne-Thomson L. M.* Theoretical Hydrodynamics / M. M. Thomson. — London: Macmillan and Co. LTD. — New York: St. Martin's Press, 1960.
11. *Кочин Н. Е.* Теоретическая гидромеханика: в 2 ч. / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 1963. — Ч. 2. — 727 с.
12. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1987. — 833 с.
13. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике / С. В. Валландер. — Л.: Изд-во Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова, 1978. — 294 с.

14. *Коптев А. В.* Первый интеграл и пути дальнейшего интегрирования уравнений Навье – Стокса / А. В. Коптев // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. — 2012. — № 147. — С. 7–17.

15. *Koptev A. V.* Generator of Solution for 2D Navier – Stokes Equations / A. V. Koptev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2014. — Vol. 7. — № 3. — Pp. 324–330.

16. Ко*ptev* А. *V.* The Structure of Solution of the Navier – Stokes Equations / A. V. Koptev // Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ. — 2014. — Т. 3. — № 6. — С. 656–660. DOI:10.1134/S2304487X1406008X.

17. *Коптев А. В.* Как разрешить 3D уравнения Навье – Стокса / А. В. Коптев // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. — 2015. — № 173. — С. 7–15.

18. *Koptev A. V.* Perspectives of Solution of the Navier – Stokes equations / A. V. Koptev // International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics. — Suzdal, 2015. — Pp. 172–174.

19. *Панченков А. Н.* Асимптотические методы в задачах оптимального проектирования и управления. / А. Н. Панченков, Г. М. Ружников [и др.]. — Новосибирск: Наука, 1983. — 265 с.

THEORETICAL RESEARCH OF THE FLOW AROUND CYLINDER OF AN IDEAL INCOMPRESSIBLE MEDIUM IN THE PRESENCE OF A SHIELDING EFFECT

We offer an analytical solution method for plane problem of an ideal steady incompressible fluid flow around a circular cylinder in the presence of the shielding surface. The method is based on solving a boundary value problem for the equations of steady motion of an ideal incompressible fluid with the boundary conditions of impermeability along the streamlined contours of the cylinder and the shielding surface. As the constitutive equations we use integral of the Euler equations for 2D steady motion of an ideal incompressible fluid. In the result of solving the problem using asymptotic methods derived new formulas that determine the lift force and the drag of the streamlined body as functions of initial parameters. The formulas obtained are fair at the small sizes of a streamline body in comparison with the sizes of the running stream. Using the standard software package of Maple programs we performed calculations and found out the values of these quantities for different values of input parameters with regard to shielding effect.

Keywords: overflow, circular cylinder, ideal incompressible fluid, shielding surface, equation, integral, lift force, drag, shielding .effect.

REFERENCES

1. Belavin, N. I., *Ekranoplana*. Leningrad: Sudostroenie, 1977.

2. Maskalik, A. I., R. A. Nagapetjan, and A. Ja. Vol’fenzon. *Krylatye suda Rossii: Istorija i sovremennost.* SPb.: Sudostroenie, 2006.

3. Maskalik, A. I., et al. *Ekranoplani. Osobennosti teorii I proektirovania*. SPb.: Sudostroenie, 2000.

4. Petrov, G. F. *Gidrosamolety i jekranoplany Rossii: 1910-1999.* M.: Rusavia, 2000.

5. Nebilov, A. V., and V. A. Nebilov. “Rossiiskie ekranoplani: novie perspektivi v megdunarodnom sotrudnichestve”. *Russkij inzhener* 4(39) (2013): 33–36.

6. Bolotin, A. A. “Mathematical modeling of wig vehicle motion during its take-off run.” *Trudy NGTU* 5(102) (2013): 283–286.

7. Nebylov, A. V., and V. A. Nebylov. “Wing-in-ground Effect Vehicles: Modern Concepts of Design and New Role of Automatic Control.” *3-rd European Conference for Aero-Space Sciences (EUCASS), EUCASS Association*. 2009: 1–10.

8. Lange, R. H., and J. W. Moor. “Large Wing-in-Ground Effect Transport Aircraft.” *Journal of aircraft* 17.4 (1980): 260–266.

9.Frolov, K. V., and V. A. Frolova. “Nesjimaemoe potensialnoe techenie okolo cilindra pri nalichii ekranirujusei poverhnosti.” *Sovremennye problemy fundamental’nyh i prikladnyh nauk. Chast’ 6. Ajeromehanika i letatel’naja tehnika. – Materialy 52-oj nauchnoj konferencii MFTI.* M.: Jukovskii, 2009: 31–33.

10. Milne-Thomson, L. M. *Theoretical Hydrodynamics*. London: Macmillan and Co. LTD. New York: St. Martin’s Press, 1960.

11. Kochin, N. E., I. A. Kibel, and N. V. Rose. *Teoreticheskaja gidromehanika. Ch. 2.* M.: Izd-vo fiz.-mat. lit., 1963.

12. Lojcjanskij, L. G. *Mehanika zhidkosti i gaza*. M.: Nauka, 1987.

13. Vollander, S. V. *Lecsii po Hidroatromechanike*. L.: Izd-vo Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta im. A.A. Zhdanova, 1978.

14. Koptev, A. V.” First Integral and Ways of Further Integration of Navier - Stokes Equations.” *Izvestia: Herzen University Journal of Humanities & Sciences* 147 (2012): 7–17.

15. Koptev, Alexander V. “Generator of solutions for 2 D Navier–Stokes equations.” *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* 7.3 (2014): 324–330.

16. Koptev, A. V. “The Structure of Solution of the Navier – Stokes Equations.” *Vestnik natsional’nogo issledovatel’skogo yadernogo universiteta “MIFI”* 3.6 (2014): 656–660. DOI:10.1134/S2304487X1406008X

17. Koptev, A.V. “How to Solve 3d Navier - Stokes Equations.” *Izvestia: Herzen University Journal of Humanities & Sciences* 173 (2015): 7–15.

18. Koptev, A. V. “Perspectives of Solution of the Navier – Stokes equations.” *International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics*. Suzdal, 2015: 172–174.

19. Panchenkov, A. N., G. M. Rujnikov, et al. *Asimptoticheskie metodi v sadachah optimalnogo proektirovania I upravlenia*. Novosibirsk: Nauka (Siberian Department), 1983.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Коптев Александр Владимирович —
кандидат физико-математических наук, доцент.
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С.О. Макарова»
Alex.Koptev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Koptev Aleksandr Vladimirovich —
Phd, associate professor
Admiral Makarov State University
of Maritime and Inland Shipping
Alex.Koptev@mail.ru

Статья поступила в редакцию 8 декабря 2015 г.

УДК 531.31, 539.3

В. Н. Глухих,
В. М. Петров,
Н. Ю. Сойту

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ НАМОТКИ ОТВЕТСТВЕННЫХ ОБОЛОЧЕК И СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ В СУДОСТРОЕНИИ И ПОРТОВОЙ ИНФРАСТРУКТУРЕ

В статье рассмотрен новый многоуровневый подход, позволяющий на этапе проектирования конструкций из композитных материалов, полученных методом намотки, определить основные наиболее важные физико-механические характеристики для этих конструкций в зависимости от анизотропии, отвечающие за напряженно-деформированное состояние и критические нагрузки, приводящие к разрушению. Изложены результаты, которые показывают, что в плоскости, перпендикулярной волокнам, постоянные упругости могут иметь несколько экстремальных значений в зависимости от сочетания величин модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации. Приведены результаты расчетов и построенные на их основе характерные кривые, подтверждающие анизотропию свойств основных физико-механических характеристик композиционного материала. В целом предложенная теория после дополнительных экспериментальных исследований может быть адаптирована не только для расчета оболочек из композиционных материалов, но и для других конструктивных исполнений.

Ключевые слова: композиционные материалы, математическая модель, цилиндрические оболочки, анизотропия свойств, модуль упругости, главные напряжения, постоянные упругости, коэффициент Пуассона, модуль сдвига.