

12. Loicjanskij, L. G. *Mehanika zhidkosti i gaza*. M.: Nauka, 1987.
13. Vollander, S. V. *Lecsi po Hidroatromechanike*. L.: Izd-vo Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta im. A.A. Zhdanova, 1978.
14. Koptev, A. V. "First Integral and Ways of Further Integration of Navier - Stokes Equations." *Izvestia: Herzen University Journal of Humanities & Sciences* 147 (2012): 7–17.
15. Koptev, Alexander V. "Generator of solutions for 2 D Navier–Stokes equations." *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* 7.3 (2014): 324–330.
16. Koptev, A. V. "The Structure of Solution of the Navier – Stokes Equations." *Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"* 3.6 (2014): 656–660. DOI:10.1134/S2304487X1406008X
17. Koptev, A.V. "How to Solve 3d Navier - Stokes Equations." *Izvestia: Herzen University Journal of Humanities & Sciences* 173 (2015): 7–15.
18. Koptev, A. V. "Perspectives of Solution of the Navier – Stokes equations." *International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics*. Suzdal, 2015: 172–174.
19. Panchenkov, A. N., G. M. Rujnikov, et al. *Asimptoticheskie metody v sadachah optimalnogo proektirovaniya I upravleniya*. Novosibirsk: Nauka (Siberian Department), 1983.

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Коптев Александр Владимирович —  
кандидат физико-математических наук, доцент.  
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени  
адмирала С.О. Макарова»  
Alex.Koptev@mail.ru

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Koptev Aleksandr Vladimirovich —  
Phd, associate professor  
Admiral Makarov State University  
of Maritime and Inland Shipping  
Alex.Koptev@mail.ru

Статья поступила в редакцию 8 декабря 2015 г.

УДК 531.31, 539.3

**В. Н. Глухих,  
В. М. Петров,  
Н. Ю. Сойтгу**

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ, ИСПОЛЗУЕМЫХ ДЛЯ НАМОТКИ ОТВЕТСТВЕННЫХ ОБОЛОЧЕК И СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ В СУДОСТРОЕНИИ И ПОРТОВОЙ ИНФРАСТРУКТУРЕ

В статье рассмотрен новый многоуровневый подход, позволяющий на этапе проектирования конструкций из композитных материалов, полученных методом намотки, определить основные наиболее важные физико-механические характеристики для этих конструкций в зависимости от анизотропии, отвечающие за напряженно-деформированное состояние и критические нагрузки, приводящие к разрушению. Изложены результаты, которые показывают, что в плоскости, перпендикулярной волокнам, постоянные упругости могут иметь несколько экстремальных значений в зависимости от сочетания величин модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации. Приведены результаты расчетов и построенные на их основе характерные кривые, подтверждающие анизотропию свойств основных физико-механических характеристик композиционного материала. В целом предложенная теория после дополнительных экспериментальных исследований может быть адаптирована не только для расчета оболочек из композиционных материалов, но и для других конструктивных исполнений.

**Ключевые слова:** композиционные материалы, математическая модель, цилиндрические оболочки, анизотропия свойств, модуль упругости, главные напряжения, постоянные упругости, коэффициент Пуассона, модуль сдвига.

**В** СОВРЕМЕННОМ судостроении для изготовления оболочек корпусов, емкостей высокого давления, воздухопроводов и трубопроводов находят широкое применение композиционные полимерные материалы (стекло и углепластики), обладающие анизотропными свойствами. Наиболее важными этапами технологии изготовления подобных конструкций является получения исходной заготовки методом намотки с минимальным количеством дефектов, а также последующей механической обработки и сборки [1] – [3]. В технологическом процессе на этапе подготовки полимерной матрицы (фенольной или эпоксидной смолы) широко используют пластификаторы, наполнители и наномодификаторы, придающие изделию после отверждения особые эксплуатационные свойства [4]. На практике этап получения заготовки является не только этапом формообразования изделия, получения заданной точности и взаимного расположения поверхностей, но также этапом обеспечения показателей качества и требуемых физико-механически характеристик (предела прочности, упругости, реологических параметров и т. п.), определяющих не только основные эксплуатационные свойства, но и надежность, а также ресурс агрегатов и узлов в целом.

В данной статье рассмотрен новый подход, позволяющий на этапе проектирования конструкций из композитных материалов, полученных методом намотки с достаточной полнотой для инженерных расчетов, осуществлять вычисления отдельных физико-механических характеристик, таких как величины модулей упругости, коэффициенты поперечной деформации, и моделировать напряженное и деформированное состояние композиционного материала в конструкции. Анизотропии характеристик упругости различных анизотропных материалов, в том числе полимерных композиционных, при условии экстремальных условий эксплуатации, были посвящены работы Е. К. Ашкенази, А. Н. Митинского и многих других [5] – [7]. Отсутствие математических зависимостей между постоянными упругости в главных направлениях анизотропии приводило к получению противоречивых результатов теоретических и экспериментальных исследований [8], [9].

В результате проведенных исследований [3], [10] было установлено, что в плоскости, перпендикулярной волокнам, постоянные упругости могут иметь либо два, либо три экстремальных значения в зависимости от сочетания величин модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации. От того, насколько достоверно найдены постоянные упругости в любом произвольном направлении, зависят результаты исследования напряженного и деформированного состояния композиционного материала.

Основные схемы наливки, используемые при расчетах и моделировании, приведены на рисунке.

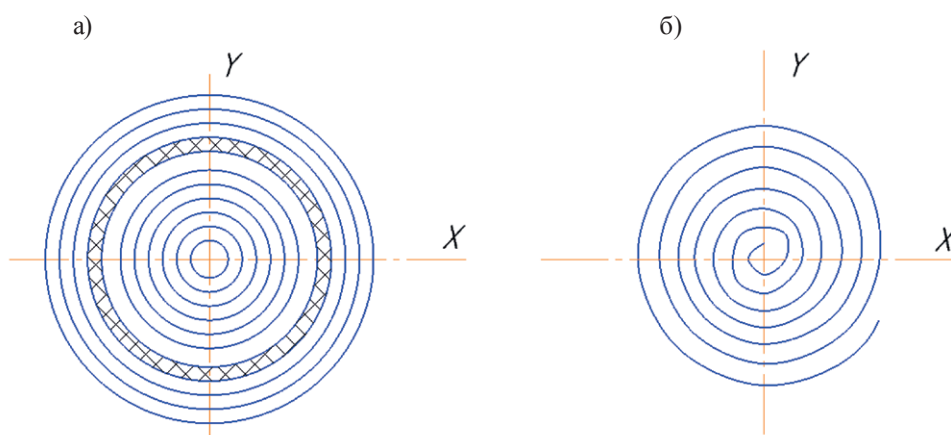


Схема намоточного композита: а — радиальная; в — по спирали

Для проверки теоретических предпосылок расчета конкретных физико-механических характеристик, в зависимости от свойств намоточных композиционных материалов и конструктив-

ного исполнения, требуется экспериментальное исследование вырезанных образцов известными методами испытаний на разрывных машинах. На основе использования дифференциального уравнения IV порядка в частных производных с двумя переменными и функции напряжений в виде суммы полиномов удалось установить математическую связь между постоянными упругости в главных направлениях анизотропии:

$$F = \sum_{i=1}^n x^k f_k(y), \quad (1)$$

где  $f_k(y)$  — неизвестная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$G_{ar} = \frac{Er}{3 - \alpha_2^2 + 2\mu_{ka}}, \quad (2)$$

где  $\alpha_2^2 = \frac{Er}{Ea}$ .

Из зависимости (2) в результате простого математического преобразования можно получить равенство

$$\frac{Er}{Gra} - 2\mu_{ra} = 3 - \alpha_2^2. \quad (3)$$

Левая часть равенства (3) входит в качестве множителя в дифференциальное уравнение и ранее определялась на основе экспериментальных исследований. Правая часть представляет собой найденное теоретическое значение левой части, удовлетворяющей дифференциальному уравнению IV порядка в частных производных для цилиндрически анизотропного ортотропного тела.

Далее, по аналогии с полученными предыдущими зависимостями, для составляющих модуля сдвига можно записать выражения:

$$G_{at} = \frac{Et}{3 - \alpha_3^2 + 2\mu_{ta}}, \quad (4)$$

где  $\alpha_3^2 = \frac{Et}{Ea}$ ;

$$G_{rt} = \frac{Et}{3 - \alpha^2 + 2\mu_{tr}}, \quad (5)$$

где  $\alpha^2 = \frac{Et}{Ea}$ ,

вместо формулы

$$G_{ik} = \frac{E_{ik}^{45}}{2(1 + \mu_{ik}^{45})}, \quad (6)$$

в которую требуется подставить постоянные упругости в направлении под  $45^\circ$  к главным осям анизотропии.

Таким образом, множители  $\frac{1}{G_{rt}} - \frac{2\mu_{rt}}{Er}$  и  $\frac{4}{E_{xy}^{45}} - \frac{1}{Er} - \frac{1}{Et}$  равны отношению  $\frac{B}{Et}$ , которое может быть представлено двумя значениями:  $B = 3 - \alpha^2$ ;  $B = \frac{1 + 5\alpha^2}{3}$  на основе решения алгебраического уравнения 2-го порядка, полученного после решения и преобразований дифференциального уравнения. При этом  $E_{xy}^{45} = Et$  либо  $\frac{1}{E_{xy}^{45}} = \frac{1 + 2\alpha^2}{3Et}$  в соответствии с двумя приведенными ранее значениями  $B$ .

Модули упругости в произвольных направлениях представлены в виде

$$\frac{1}{E_{x'}} = \frac{\cos^4 \Theta}{Er} + \frac{\sin^4 \Theta}{Et} + \frac{3 - \alpha^2}{Et} \sin^2 \Theta \cos^2 \alpha \quad (7)$$

либо

$$\frac{1}{E_{x'}} = \frac{\cos^4 \Theta}{E_r} + \frac{\sin^4 \Theta}{E_t} + \frac{1+5\alpha^2}{3Et} \sin^2 \Theta \cos^2 \alpha. \quad (8)$$

Аналогичные уравнения в других плоскостях анизотропии:

$$\frac{1}{E_{z'}} = \frac{\cos^4 \beta}{E_a} + \frac{\sin^4 \beta}{E_r} + \frac{3-\alpha^2}{Er} \sin^2 \beta \cos^2 \beta \quad (9)$$

либо

$$\frac{1}{E_{z'}} = \frac{\cos^4 \beta}{E_a} + \frac{\sin^4 \beta}{Er} + \frac{1+5\alpha^2}{3Er} \sin^2 \beta \cos^2 \beta \text{ и т. д.} \quad (10)$$

Коэффициенты Пуассона:

$$\mu_{x'y'} = \frac{2(1-\alpha^2) \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta - \frac{3-\alpha^2}{2} \frac{Et}{2Grt}}{\alpha^2 \cos^4 \Theta + (3-\alpha^2) \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + \sin^4 \Theta} \quad (11)$$

либо

$$\mu_{x'y'} = -E_{x'} \left[ \left( \frac{1}{Er} + \frac{1}{Et} - \frac{3-\alpha^2}{Et} \right) \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + \frac{3-\alpha^2}{2Et} - \frac{1}{2Grt} \right]; \quad (12)$$

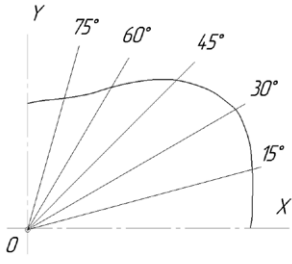
$$\mu_{x'y'} = -E_{x'} \left[ \left( \frac{1}{Er} + \frac{1}{Et} - \frac{1+5\alpha^2}{3Et} \right) \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + \frac{1+5\alpha^2}{6Et} - \frac{1}{2Grt} \right] \quad (13)$$

и т. д. для других плоскостей анизотропии.

На основе полученных зависимостей (1) – (13) были составлены алгоритм и программа для расчета параметров характеризующих упруго-пластические характеристики в зависимости от варьируемых углов наклона. Подпрограмма реализована в среде MathCad. Основные результаты расчетов и их графическая интерпретация приведены в следующей таблице.

**Результаты расчетов и построенные на основе моделирования характерных кривых, подтверждающих анизотропию свойств основных физико-механических характеристик композиционного материала**

| Наименование параметра                                         | Характерные кривые, полученные в результате расчетов по зависимостям (1) – (13) | Математические зависимости                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Анизотропия модуля упругости в поперечном сечении композита |                                                                                 | $1 - B_{(1)} = 3 - \alpha^2;$<br>$E_{xy}^{45} = Et;$<br>$2 - B_{(2)} = \frac{1+5\alpha^2}{3};$<br>$E_{xy}^{45} = \frac{3Et}{1+2\alpha^2}$                                                                                                                                                                                  |
| 2. Анизотропия модуля сдвига                                   |                                                                                 | $1 - B_{(1)} = 3 - \alpha^2;$<br>$G_{rt} = \frac{Et}{3 - \alpha^2 + 2\mu_{tr}};$<br>$2 - B_{(2)} = \frac{1+5\alpha^2}{3};$<br>$G_{rt} = \frac{3Et}{1+5\alpha^2 + 6\mu_{tr}};$<br>$\frac{1}{G_{x'y'(2)}^{45}} = \frac{1+3\alpha^2 + 4\mu_{tr}}{2Et};$<br>$\frac{1}{G_{x'y'(1)}^{45}} = \frac{\alpha^2 + 1 + 2\mu_{tr}}{Et}$ |

|                                      |                                                                                   |                          |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| 3. Анизотропия коэффициента Пуассона |  | $B_{(1)} = 3 - \alpha^2$ |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|

Примечание. Схемы иллюстрируют визуальное изменение параметра (анизотропию свойств) в зависимости от угла наклона в выбранной системе координат.

### Выводы

1. Представленная методика и теория постоянных упругости разработаны для цилиндрически анизотропного тела с радиальной навивкой материала (ткани или отдельных нитей), при этом отдельные зависимости могут быть удовлетворительными и для решения задач общей анизотропии. Данное утверждение требует дополнительной экспериментальной проверки с целью получения уточняющих коэффициентов.

2. Предполагается, что развитие данной теории позволит выполнять с помощью полученных зависимостей геометрические и физические расчеты оболочек и стержней различных конструктивных исполнений, широко применяемых в судостроении и элементах портовой инфраструктуры. Отдельно можно выделить перспективные направления проектирования сосудов и оболочек высокого давления, крупногабаритных наружных легких корпусов, трубопроводов и длинномерных стержневых конструкций. При достаточных предварительных испытаниях на образцах можно существенно сократить затраты и время натурных испытаний реальных объектов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абозин И. Ю. Некоторые вопросы механической лезвийной обработки углепластиков / И. Ю. Абозин, В. М. Петров // Вопросы материаловедения. — 2001. — № 2. — С. 86–92.
2. Безпальчук С. Н. Обобщенная модель состояния качества поверхности ответственных деталей судовых энергетических установок выполненных из композиционных углепластиков / С. Н. Безпальчук, А. А. Буцанец, В. М. Петров // Вестник Государственного морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2015. — № 1 (29). — С. 97–102.
3. Белецкий Е. Н. Учет физико-механических характеристик композиционных углепластиков, влияющих на процессы разрушения при реализации технологического процесса механической обработки и экстремальных условий эксплуатации / Е. Н. Белецкий, В. М. Петров, С. Н. Безпальчук // Вестник Государственного морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2014. — № 2 (24). — С. 66–73.
4. Пат. 2188834. Российская Федерация. Антифрикционная композиция / В. В. Рыбин, В. М. Петров, А. Н. Пономарев, Ю. В. Абозин, В. Е. Бахарева, М. В. Малинок, В. А. Никитин; заявитель и патентообладатель ЗАО «АСТРИН-ХОЛДИНГ», ФГУП НИИКМ «Прометей». — № 18138; Заявлено 12.01.2004; Опубл. 20.02.2004; Номер и год публикации бюллетеня 5-2004.
5. Ашкенази Е. К. Построение предельных поверхностей для плоского напряженного состояния анизотропных материалов / Е. К. Ашкенази // Заводская лаборатория. — 1964. — № 2. — С. 225–227.
6. Григорович В. К. О наивыгоднейшем направлении волокон в изделиях из анизотропных материалов / В. К. Григорович, Н. Д. Соболев, Я. Б. Фридман // ДАН СССР. — 1952. — Т. 86. — № 4. — С. 703–706.
7. Росато Д. В. Намотка стеклонитью / Д. В. Росато, К. С. Грове; под ред. В. А. Гречишкина. — М.: Машиностроение, 1969. — 310 с.
8. Темнов В. Г. Конструктивные системы в природе и строительной технике / В. Г. Темнов. — СПб.: Компьютербург, 2001. — 61 с.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. — М.: Наука, 1977. — 415 с.
10. Глухих В. Н. Связь между упругими постоянными цилиндрическими анизотропного тела / В. Н. Глухих // Вестник международной академии холода. — 2008. — № 1. — С. 32–34.

## DETERMINATION OF ELASTICITY CONSTANTS WITH ANISOTROPY OF PROPERTIES OF COMPOSITE MATERIALS USED FOR WINDING THE RESPONSIBLE SHELL AND BEAM STRUCTURES IN SHIPBUILDING AND PORT INFRASTRUCTURE

*The article describes a new multilevel approach on the design phase of structures made of composite materials obtained by winding to determine the essential for the design of physical-mechanical characteristics, depending on the anisotropy responsible for the stress-strain state and the critical loads leading to destruction. The article presents the results which show that in the plane perpendicular to the continuous fibres of elasticity can have several extreme values depending on the combination of values of modules of elasticity and coefficients of transverse deformation. Results of calculations and built on the basis of the characteristic curves confirming the anisotropy of the properties of the basic physico-mechanical characteristics of the composite material. In General the proposed theory, after further experimental studies. can be adapted not only for calculation of shells made of composite materials, but also for other structural designs.*

*Keywords: composite materials, mathematical model, cylindrical shell, anisotropy properties, modulus of elasticity, principal stresses, the constant of elasticity, Poisson's ratio, shear modulus.*

### REFERENCES

1. Petrov, V. M., and I. Yu. Abozin. "Some problems of the cutting-tool edge machining of carbon- reinforced plastics." *Inorganic Materials: Applied Research* 2 (2001): 86–92.
2. Bezpalchuk, S. N., A. A. Bucanec, and V. M. Petrov. "Generalized model of the quality status of surface critical parts of ship power plants made of composite plastics." *Vestnik Gosudarstvennogo morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 1(29) (2015): 97–102.
3. Beleckij, E. N., V. M. Petrov, and S. N. Bezpalchuk. "The physical-mechanical characteristics of composite plastics influence on the processes of destruction at realization of technological process of machining and extreme conditions." *Vestnik Gosudarstvennogo morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 2(24) (2014): 66–73.
4. Rybin, V. V., V. M. Petrov, A. N. Ponomarev, Ju. V. Abozin, V. E. Bahareva, M. V. Malinok, and V. A. Nikitin. Antifrikcionnaja kompozicija. Russian Federation, assignee. Patent № 2188834.10 Sept. 2002. 12 Jan. 2004.
5. Ashkenazi, E. K. "Postroenie predelnyh poverhnostej dlja ploskogo naprjazhennogo sostojanija anizotropnyh materialov." *Industrial Laboratory* 2 (1964): 225–227.
6. Grigorovich, V. K., N. D. Sobolev, and Ja. B. Fridman. "O naivyygodnejshem napravlenii volokon v izdelijah iz anizotropnyh materialov." *DAN SSSR* 86.4 (1952): 703–706.
7. Rosato, D. V., and K. S. Grove. *Namotka steklonitju*. M.: Mashinostroenie, 1969.
8. Temnov, V. G. *Konstruktivnye sistemy v prirode i stroitelnoj tehnike*. SPb., Kompjuterburg, 2001.
9. Lehnickij, S. G. *Teorija uprugosti anizotropnogo tela*. M: Nauka, 1977.
10. Gluhih, V. N. "Relation between elastic constants of cylindrically anisotropic body." *Vestnik Mezhdunarodnoi Akademii Kholoda (Journal of IAR)* 1 (2008): 32–34.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Глухих Владимир Николаевич —  
доктор технических наук, доцент.  
СПбГАСУ  
tehmeh@spbgasu.ru  
Петров Владимир Маркович —  
доктор технических наук, профессор.  
СПбГАСУ  
tribotex@narod.ru  
Соїту Наталья Юрьевна —  
кандидат технических наук, доцент.  
СПбГАСУ  
natali\_s01@mail.ru

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Gluhih Vladimir Nikolaevich —  
Dr. of Technical Sciences, associate professor.  
SPSUACE  
tehmeh@spbgasu.ru  
Petrov Vladimir Markovich —  
Dr. of Technical Sciences, professor.  
SPSUACE  
tribotex@narod.ru  
Sojtu Natalja Jurevna —  
PhD, associate professor.  
SPSUACE  
natali\_s01@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10 февраля 2016 г.