

ВОДНЫЕ ПУТИ СООБЩЕНИЯ И ГИДРОГРАФИЯ

УДК 528.3

П. В. Томсон

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ШИРОТЫ В ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Задачей данной статьи является разработка нового алгоритма вычисления геодезической широты в функции пространственных геоцентрических координат. В отличие от существующих способов определения геодезической широты, основанных на итеративных вычислениях или решении уравнения четвертой степени, предлагается способ непосредственного вычисления геодезической широты по предварительно рассчитанному приближенному её значению. Задача определения приближенного значения геодезической широты решается в плоскости меридиана данной точки с использованием соотношений углов и длин линий. Начальным аргументом для расчёта приближенного значения геодезической широты предлагается принять геоцентрическую широту. По приближенному значению геодезической широты рассчитывается приближенное значение радиуса кривизны первого вертикала. Таким образом, в иррациональной функции устраняется причина иррациональности, так как сложная эллиптическая функция искомой величины заменяется вещественным числом. Устранение иррациональности позволяет использовать любое из трёх исходных уравнений для непосредственного вычисления искомой величины — геодезической широты точки, положение которой задано пространственными геоцентрическими координатами.

Ключевые слова: пространственные прямоугольные координаты, геодезические координаты, геодезическая широта, геодезическая долгота, геодезическая высота, геоцентрическая широта, приведённая широта.

В НАСТОЯЩЕЕ время при преобразовании пространственных прямоугольных координат в геодезические приходится сталкиваться с определённой проблемой, связанной с вычислением геодезической широты. Из исходных уравнений, в которых пространственные прямоугольные координаты вычисляются в функции геодезической широты, геодезической долготы и геодезической высоты, вычислить в обратном порядке геодезическую широту можно только итеративным способом, т. е. последовательным приближением. Рассматриваемая задача имеет и прямое решение. В этом случае нужно задаться системой других уравнений, а именно, уравнением меридианного эллипса и уравнением нормали к меридианному эллипсу. Совместное решение этих уравнений приводит к одному уравнению четвертой степени, которое можно решить с помощью оптимизационного блока компьютерного приложения или, используя известные в математике алгоритмы, с последовательным переходом к кубическому уравнению и затем к квадратному уравнению. В данной работе предлагается алгоритм вычисления геодезической широты, исключающий необходимость итеративных вычислений или решения уравнений четвертой степени. В настоящее время решение этой задачи является весьма актуальным [1], так как постоянно возникает необходимость согласования положения определяемых точек в различных системах координат [2] – [4], таких как СК-42, СК-95, ПЗ-90, ПЗ-90.02, и в связи с введением, согласно Постановлению Правительства Российской Федерации [5] – [7], новых единых государственных систем координат ГСК-2011 и ПЗ-90.11.

Если по заданным геодезическим координатам B , L и H вычисляются пространственные прямоугольные координаты X , Y , Z , то никаких затруднений не возникает, мы просто реализуем известные формулы (1):

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B, \end{aligned} \quad (1)$$

где N — радиус кривизны первого вертикала;
 e — первый эксцентриситет эллипсоида вращения.

При решении обратной задачи сталкиваемся с определённой проблемой, связанной с вычислением геодезической широты. Из уравнений (1) не удаётся выразить геодезическую широту в конечном виде, так как получаем иррациональное выражение. В этом случае геодезическую широту вычислить можно только итеративным способом. Для этого необходимо задать начальное приближенное значение геодезической широты, а затем реализовать итеративную формулу, каждый раз сравнивая заданное значение геодезической широты с вычисленным значением. В Государственных стандартах [8] – [10] приводится такой алгоритм, который требует выполнения до пяти итеративных циклов.

Задача вычисления геодезической широты имеет и прямое решение. Для его реализации необходимо задать два уравнения: уравнение меридианного эллипса и уравнение нормали к меридианному эллипсу, проведённой через заданную точку. Совместное решение этих уравнений приводит к одному уравнению четвёртой степени с одной неизвестной величиной. Такое уравнение просто решается с помощью оптимизационного блока компьютерного приложения или, не менее просто, по известным математическим алгоритмам последовательным переходом к кубическому и затем к квадратному уравнению.

Предложим формулу, позволяющую с максимальной геодезической точностью вычислять геодезическую широту, исключая при этом итеративные процессы и решение уравнений четвёртой степени. Допустим, что даны пространственные прямоугольные координаты (X, Y, Z) точки A . Необходимо вычислить геодезическую широту B точки A (рис. 1).

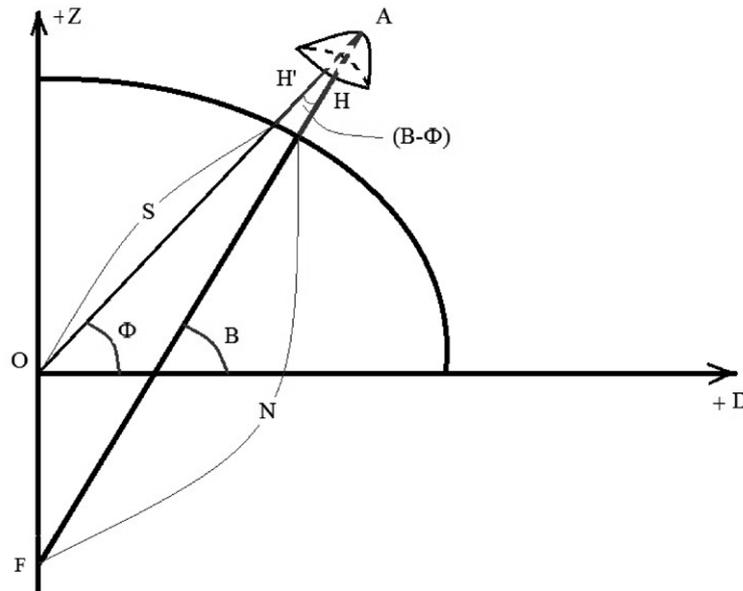


Рис. 1. Геодезическая и геоцентрическая широта точки:
 AF — нормаль к меридианному эллипсу, проходящая через точку A ;
 AO — линия, соединяющая точку A с центром эллипсоида O ;
 Φ — геоцентрическая широта точки A ; B — искомая геодезическая широта точки A ;
 H — геодезическая высота точки A ;
 H' — расстояние от эллипсоида до точки A по линии AO

Поставленная задача может быть решена с использованием схемы в плоскости меридиана заданной точки. Вычислим вспомогательные величины:

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Выразим первое приближение геодезической широты B в функции геоцентрической широты Φ (рис. 2). Английский геодезист Боуринг решал такую задачу в функции приведённой широты [11]. Для этого вычислим геоцентрическую широту Φ по формуле

$$\Phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{Z}{D} \right) \quad (2)$$

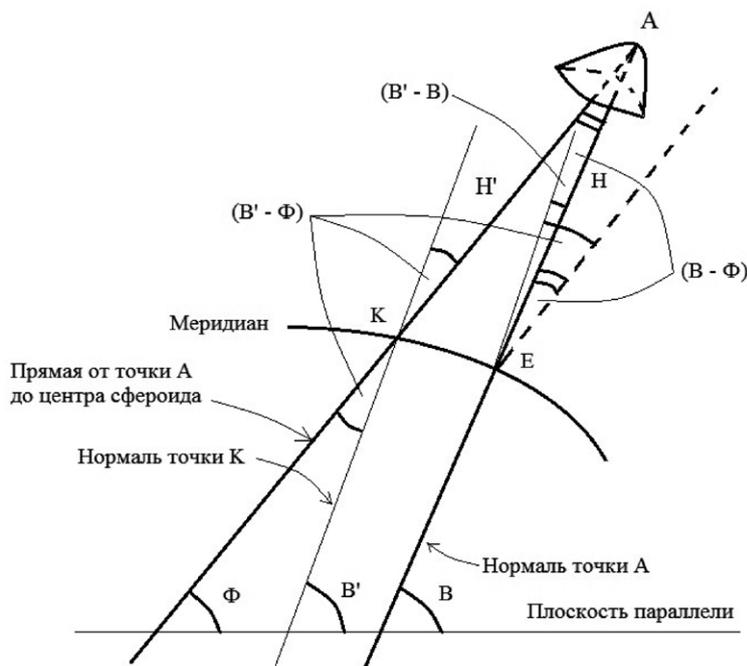


Рис. 2. Переход от геоцентрической широты к геодезической широте

и геодезическую широту B' точки K , лежащей на линии, соединяющей точку A с центром эллипсоида, по известной формуле

$$B' = \operatorname{arctg} \left[\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}(\Phi) \right] = \operatorname{arctg} \left(\frac{a^2 Z}{b^2 D} \right). \quad (3)$$

Вычислим разность геодезической широты точки K и геоцентрической широты точки A (не превышает $11,5'$) по формуле

$$\Delta B = (B' - \Phi) = \operatorname{arctg} \left(\frac{a^2 Z}{b^2 D} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{Z}{D} \right). \quad (4)$$

Величина отрезка H' определится в виде

$$H' = Q - S, \quad (5)$$

где S — полурадиус меридианного эллипса, продолжение которого проходит через точку A .

Значение S можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2(\Phi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\Phi)}{b^2}}} = \frac{a(1-\alpha)}{\sqrt{1-e^2 \cdot \cos^2(\Phi)}} = \frac{b}{\sqrt{1-e^2 \cdot \cos^2(\Phi)}}, \quad (6)$$

где a и b — соответственно большая и малая полуоси меридианного эллипса (эллипсоида); α и e — полярное сжатие и первый эксцентриситет меридианного эллипса (эллипсоида).

Приближенное значение геодезической высоты H можно определить из фигуры AKE (рис. 2) в виде

$$H = H' \cdot \cos(\Delta B) = (Q - S) \cdot \cos(\Delta B). \quad (7)$$

Искомое значение геодезической широты вычислим по формуле

$$B = \Phi + \Delta B - \delta B = \Phi + (B' - \Phi) - \delta B = B' - \delta B, \quad (8)$$

где поправка δB может быть представлена как

$$\delta B \approx \frac{KE}{S} = \frac{(H \Delta B)}{S} = \frac{(Q - S) \cos(\Delta B) \Delta B}{S}. \quad (9)$$

Найденное приближенное значение геодезической широты B точки A подставляем в формулу первого вертикала

$$N \approx \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (10)$$

Полученное число подставляем в любую из формул (1) и выражаем искомую геодезическую широту:

$$\begin{aligned} B &= \arccos \left[\frac{X}{(N + H) \cos(L)} \right]; \\ B &= \arccos \left[\frac{Y}{(N + H) \sin(L)} \right]; \\ B &= \arcsin \left[\frac{Z}{(N(1 - e^2) + H)} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Геодезическую долготу L находим по известной формуле

$$L = \arctg \left(\frac{Y}{X} \right). \quad (12)$$

Рассмотрим пример. Даны геодезические координаты точки A в референцной системе СК-42:

$$B = 52^\circ 00' 00,0000'' \text{ с.ш.};$$

$$L = 18^\circ 00' 00,0000'' \text{ в.д.};$$

$$H = 6400,000 \text{ м.}$$

Необходимо вычислить геодезическую широту в референцной системе ПЗ = 90.

По формулам (1) вычисляем пространственные прямоугольные координаты точки A в референцной системе СК-42, затем по формуле Гельмерта [12], с учётом известных параметров связи, — пространственные прямоугольные координаты точки A в референцной системе ПЗ-90:

$$X = 3746209,032 \text{ м};$$

$$Y = 1217078,469 \text{ м};$$

$$Z = 5007848,301 \text{ м.}$$

По полученным пространственным прямоугольным координатам вычисляем геодезическую широту точки A в референцной системе ПЗ-90, используя ГОСТ [8] – [10], алгоритм прямого решения и представленный ранее алгоритм. В результате получаем одно и то же значение широты:

$$B = 51^\circ 59' 58,6632'' \text{ с.ш.},$$

соответствующее заданной точности 0,0001''.

Выводы

1. Для вычисления геодезической широты может быть использована любая из формул (1) с учётом формулы (9). Разработанный алгоритм может служить альтернативой приведённым в ГОСТ [8] – [10] алгоритмам вычисления геодезической широты в функции пространственных геоцентрических прямоугольных координат. Алгоритм не требует итеративных вычислений и при однократном цикле вычислений даёт точный результат.
2. Применение предлагаемого алгоритма возможно при решении задачи преобразования геодезических координат из одной референцной системы в другую.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горобец В. П. Результаты построения государственной геоцентрической системы координат Российской Федерации в рамках федеральной целевой программы «ГЛОНАСС» / В. П. Горобец, Г. В. Демьянов, А. Н. Майоров, Г. Г. Побединский // Геодезия и картография. — 2012. — № 2. — С. 53–57.
2. Дёгтева П. В. Способ определения параметров связи референцных систем / П. В. Дёгтева, П. В. Томсон // Сборник статей научно-практической конференции «Морское образование: традиции, реалии и перспективы». — СПб.: Изд-во ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2015. — Т. 2. — С. 51–55.
3. Томсон П. В. Определение параметров связи референцной системы МГС-84 (WGS-84) и референцной системы ГСК-2011 / П. В. Томсон // Сборник статей научно-практической конференции «Морское образование: традиции, реалии и перспективы». — СПб.: Изд-во ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2015. — Т. 2. — С. 244–249.
4. Томсон П. В. Преобразование геодезических координат к плоским прямоугольным в одной координатной зоне проекции Гаусса — Крюгера для всей территории Российской Федерации / П. В. Томсон // Сборник материалов международной научно-практической конференции «Геодезия, картография, геоинформатика и кадастры. От идеи до внедрения». — СПб.: Политехника, 2015. — С. 303–305.
5. Копылова Н. С. Системы координат в картографии: настоящее и будущее / Н. С. Копылова, И. П. Стариков // Сборник материалов международной научно-практической конференции «Геодезия, картография, геоинформатика и кадастры. От идеи до внедрения». — СПб.: Политехника, 2015. — С. 299–303.
6. Постановление Правительства Российской Федерации от 28 декабря 2012 г. № 1463 «О единых государственных системах координат».
7. Томсон П. В. Об установлении единых государственных систем координат ГСК-2011, ПЗ-90.11 / П. В. Томсон // Сборник научных трудов профессорско-преподавательского состава Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — СПб.: Изд-во ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова, 2014. — С. 138–140.
8. ГОСТ Р 51794-2001. Аппаратура радионавигационная глобальной навигационной спутниковой системы и глобальной системы позиционирования. Системы координат. Методы преобразования координат. — М.: Госстандарт России, 2001. — 12 с.
9. ГОСТ Р 51794-2008. Глобальные навигационные спутниковые системы. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. — М.: Стандартинформ, 2009. — 16 с.
10. ГОСТ 32453-2013. Межгосударственный стандарт. Глобальные навигационные спутниковые системы. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. — М.: Стандартинформ, 2014.
11. Bowring B. R. Transformation from spatial to geographical coordinates / B. R. Bowring // Survey Review. — 1976. — Vol. 23. — Is. 181. — Pp. 323–327. DOI:10.1179/sre.1976.23.181.323.
12. Томсон П. В. Системы координат. Методы преобразования координат / П. В. Томсон, Г. В. Макаров. — СПб.: Изд-во ГМА им. адм. С. О. Макарова, 2010. — 62 с.

DEVELOPMENT OF ALGORITHM FOR COMPUTING GEODATIC LATITUDE IN FUNCTION OF SPATIAL COORDINATES GEOCENTRIC WIDTH

My goal in writing this article is developing a new algorithm for computing geodetic latitude in function of spatial coordinates geocentric width. Unlike the existing ways of determining the latitude of Geodesy, based on iterative calculations or solving quartic equations, provides a direct calculation of geodetic latitude on pre-

determined close its value. To determine the approximate value of the geodetic latitude is solved in the plane of the meridian of the point of using angles and ratios of lengths of lines. The initial argument to calculate the approximate value of the geodetic latitude is invited to adopt the geocentric latitude. On the close value of geodetic latitude is calculated an approximate value of the radius of curvature of the first vertical. Thus, the irrational function eliminates the cause of irrationality as a complex elliptic function desired values is replaced by a real number. Elimination of irrationality allows you to use any of the three original equations to compute directly the desired magnitude is geodetic latitude of the point whose position is specified spatial geocentric coordinates.

Keywords: spatial rectangular coordinates, geodetic coordinates, geodetic latitude, geodetic longitude, geodesic height, geocentric latitude, reduced latitude.

REFERENCES

1. Gorobets, V. P., G. V. Demyanov, A. N. Mayorov, and G. G. Pobedinskiy. "Results of Russian Federation state geocentric coordinate system building in the framework of "GLONASS" federal target program." *Geodesy and Cartography* 2 (2012): 53–57.
2. Djogteva, P. V., and P. V. Tomson. "How to determine parameters of reference systems." *Sbornik statej nauchno-prakticheskoy konferencii «Morskoe obrazovanie: tradicii, realii i perspektivy»*. SPb.: Izd. GUMRF im. adm. S.O. Makarova, 2015. Vol. 2. 51–55.
3. Tomson, P. V. "Determination of parameters of reference system MGS-84 (WGS-84) and reference system SSC-2011." *Sbornik statej nauchno-prakticheskoy konferencii «Morskoe obrazovanie: tradicii, realii i perspektivy»*. SPb.: Izd. GUMRF im. adm. S.O. Makarova, 2015. Vol. 2. 244–249.
4. Tomson, P. V. "Preobrazovanie geodezicheskikh koordinat k ploskim prjamougolnym v odnoj koordinatnoj zone proekcii Gaussa-Krjugera dlja vsej territorii Rossijskoj Federacii." *Sbornik materialov mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Geodezija, kartografija, geoinformatika i kadastry. Ot idei do vnedrenija»*. SPb.: Izd. Politehnika, 2015: 303–305.
5. Kopylova, N. S., and I. P. Starikov. "Sistemy koordinat v kartografii: nastojashhee i budushhee." *Sbornik materialov mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Geodezija, kartografija, geoinformatika i kadastry. Ot idei do vnedrenija»*. SPb.: Izd. Politehnika, 2015: 299–303.
6. Russian Federation Government Resolution. 28 Dec. 2012. №1463 «O edinyh gosudarstvennyh sistemah koordinat».
7. Tomson, P. V. "On the establishment of the unified state system of coordinates SSC-2011 and PE-90.11." *Sbornik nauchnyh trudov professorsko-prepodavatelskogo sostava Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova*. SPb.: Izd-vo GUMRF im. adm. S.O. Makarova, 2014: 138–140.
8. Russian Federation. GOST R 51794-2001. Apparatura radionavigacionnaja globalnoj navigacionnoj sputnikovoj sistemy i globalnoj sistemy pozicionirovaniya. Sistemy koordinat. Metody preobrazovaniya koordinat. M.: Gosstandart Rossii, 2001.
9. Russian Federation. GOST R 51794-2008. Globalnye navigacionnye sputnikovye sistemy. Sistemy koordinat. Metody preobrazovaniya koordinat opredeljaemyh toчек. M.: Standartinform, 2009.
10. Global navigation satellite system. Coordinate systems. Methods of transformations for coordinates of determined points. M.: Standartinform, 2014.
11. Bowring, B. R. "Transformation from spatial to geographical coordinates." *Survey Review* 23.181 (1976): 323–327. DOI:10.1179/sre.1976.23.181.323
12. Tomson, P. V., and G. V. Makarov. *Sistemy koordinat. Metody preobrazovaniya koordinat*. SPb.: GMA im. adm. S. O. Makarova, 2010.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Томсон Петр Васильевич —
кандидат технических наук, доцент.
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С.О. Макарова»
peter-thomson@mail.ru, kaf_geo@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Thomson Peter Vasil'evich —
PhD, associate professor.
Admiral Makarov State University
of Maritime and Inland Shipping
peter-thomson@mail.ru, kaf_geo@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 25 февраля 2016 г.