СУДОСТРОЕНИЕ И СУДОРЕМОНТ

DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-4-105-113
УДК 534.121.1: 629.12: 519.63

М. В. Сухотерин,
С. О. Барышников,
Д. А. Аксенов

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящей статье приводится решение задачи о собственных колебаниях защемленной по контуру тонкой прямоугольной пластины с помощью двух гиперболотригонометрических рядов по двум координатам, удовлетворяющих основному дифференциальному уравнению задачи. При выполнении всех граничных условий получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно четырех последовательностей неизвестных коэффициентов рядов, которая сведена к бесконечной системе относительно одной последовательности коэффициентов, содержащей в качестве параметра частоту колебаний. Перебором этого параметра с меняющимся шагом находятся частоты, дающие нетривиальные решения бесконечной системы, т. е. собственные частоты. Полученный спектр собственных частот сравнивается с аналогичными частотами, найденными другими авторами. Анализируется точность вычислений и эффективность применяемых приближенных методов. Показано, что собственные частоты, найденные в настоящей работе предложенным методом, являются весьма точными при удержании в рядах 49 членов. Установлено, что дальнейшее увеличение количества членов в рядах практически не влияет на точность вычисления собственных частот.

Ключевые слова: собственные колебания, прямоугольная защемленная пластина, ряды Фурье, численные результаты.

Введение

Защемленная по всему контуру прямоугольная пластина является расчетной схемой многих плоских элементов в судостроении. Это прежде всего обшивка судна, элементы палубного настила, переборки, днищевые панели и др. Подобные пластины используются также в авиастроении, в гидротехническом и гражданском строительстве. При проведении динамических расчетов исследователей интересуют, в первую очередь, собственные частоты и соответствующие формы колебаний пластины. Многие элементы приборов и других конструкций «работают» по резонансному принципу, для других же элементов резонансные частоты (диапазоны) опасны. В некоторых случаях резонансные явления могут происходить не только на основной частоте, но и на обертонах.

Находят применение указанные пластины и в нанотехнике. Высокая точность вычисления собственных частот колебаний прямоугольных пластин, защемленных по контуру, требуется при создании современных прецизионных электромеханических преобразователей (биморфные пьезоэлементы в системах юстировки и позиционирования различных оптикомеханических систем) и анализе качества их функционирования, а также при создании микроплат в электронике. Данная задача не имеет точного решения в замкнутой форме, поэтому известные приближенные решения оставляют открытым вопрос о их точности.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма определения спектра собственных частот и сравнение полученных значений с результатами других авторов, а также оценка точности применяемых методов.

Первые численные результаты определения собственных частот колебаний защемленной по контуру квадратной пластины были получены в работах K. Sezawa [1], S. Tomatica [2] и S. Igushi [3] методом рядов. Например, S. Igushi использовал комбинации шести степенных и тригонометрических функций, удовлетворяющих граничным условиям. В дальнейшем многие исследователи обращались к этой задаче, пытаясь уточнить известные численные результаты с помощью тех или иных приближенных методов, а также получить значения более высоких тонов колебаний. Широкое применение получил *метод Ритца* (или Релея–Ритца). D. Young [4] представлял решение в виде степенного ряда с девятью членами. А. П. Филиппов [5] выбирал решение в виде конечного ряда из 20 ортонормированных полиномов Лежандра. A. Leissa [6] использовал двойной степенной ряд с 36 слагаемыми. S. Dickinson и E. Li [7] применяли ортогональные полиномы из решения для свободно опертой пластины. R. Bhat [8], а также K. Liev и др. [9] находили собственные частоты с использованием специальных ортогональных полиномов, которые с помощью процедуры Грама–Шмидта (Gram–Schmidt) ускоряют процесс аппроксимации в методе Релея–Ритца. R. Bhat и др. [10] для сравнения решали задачу еще тремя методами: методом Рэлея–Ритца с функцией формы, которая включает две экспоненты, определяемые минимизацией фундаментальных частотных коэффициентов, оптимальным методом Канторовича и методом конечных элементов (МКЭ).

С. В. Нестеров [11] решал задачу вариационным методом с помощью функций Крылова. Им были построены аналитические выражения для вычисления собственных частот и форм колебаний. S. Odman [12] применял метод, близкий к методу Галеркина. В справочнике Д. В. Вайнберга [13] приводятся, по-видимому, результаты S. Igushi [3]. В. В. Болотин [14] использовал *асимптотический метод*, представляя искомое решение суммой внутреннего решения и поправочных решений, учитывающих динамический краевой эффект. N. Bardell [15] применял МКЭ — аппроксимирующая функция содержала 10×10 полиномов по двум координатам, исследовалась зависимость собственных частот от коэффициента Пуассона. Автором были получены лишь первые три частоты. Y. Kerboua и др. [16] использовали полуаналитический гибридный МКЭ в сочетании с теорией оболочек Сандерса.

В работах C. Ng и др. [17], а также X. Wang и S. Xu [18] собственные частоты находились *методом дискретных сингулярных сверток* (DSC). C. Shu и H. Du [19], а также R. Saini и R. Lal [20] решали задачу с помощью обобщенных дифференциальных квадратур (GDQ).

S. Reutsky [21] применял *метод фундаментальных решений* основного дифференциального уравнения задачи, который относится к приближенным бессеточным методам. Коэффициенты ряда по фундаментальным решениям находятся из условия минимума квадратичного функционала.

Постановка задачи

Рассматривается защемленная по контуру прямоугольная пластина с размерами $a \times b$ в плане постоянной толщины h. Начало системы координат помещено в центр пластины. Вводятся относительные координаты срединной плоскости. Тогда размеры пластины будут следующими: $-\gamma/2 \le x \le \gamma/2$, $-1/2 \le y \le 1/2$, где $\gamma = a/b$.

Дифференциальное уравнение для определения форм собственных колебаний пластины имеет вид [22]:

$$\nabla^2\nabla^2 w(x,y) - \Omega^2 w(x,y) = 0, \qquad (1)$$

где ∇^2 — двумерный оператор Лапласа; w — прогиб срединной поверхности пластины; $\Omega = pb^2\sqrt{\rho h/D}$ — относительная частота колебаний; p — круговая частота; ρ — плотность материала; $D = Eh^3\big/\left[12(1-\nu^2)\right]$ — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Граничные условия:

$$x = \pm\gamma/2: \quad w = 0, \quad w'_x = 0; \qquad (2)$$

$$y = \pm 1/2: \quad w = 0, \quad w'_y = 0. \qquad (3)$$

Требуется найти собственные частоты колебаний Ω_i, которые дают нетривиальные решения задачи (1) – (3) и соответствующие им формы колебаний.

Построение решения

Рассматривались четыре вида колебаний:

– симметричные относительно обеих осей ($S - S$ колебания);

– антисимметричные относительно обеих осей ($A - A$ колебания);

– антисимметрично-симметричные ($A - S$ колебания);

– симметрично-антисимметричные ($S - A$ колебания).

Выражения для функции прогибов выбирались, соответственно, в виде [23]:

$$w_{S-S} = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left(A_k \operatorname{ch} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \beta_k x\right) \cos \lambda_k y + \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} \left(C_s \operatorname{ch} \xi_s y + D_s \operatorname{ch} \eta_s y\right) \cos \mu_s x;$$
$$\lambda_k = k\pi,\ \mu_s = s\pi / \gamma,\ \tilde{k} = (k+1)/2,\ \ \tilde{s} = (s+1)/2. \tag{4}$$

$$w_{A-A} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \left(A_k \operatorname{sh} \alpha_k x + B_k \operatorname{sh} \beta_k x\right) \sin \lambda_k y + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s} \left(C_s \operatorname{sh} \xi_s y + D_s \operatorname{sh} \eta_s y\right) \sin \mu_s x;$$
$$\lambda_k = 2k\pi,\ \mu_s = 2s\pi / \gamma,\ \ (k, s = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

$$w_{A-S} = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left(A_k \operatorname{sh} \alpha_k x + B_k \operatorname{sh} \beta_k x\right) \cos \lambda_k y + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s} \left(C_s \operatorname{ch} \xi_s y + D_s \operatorname{ch} \eta_s y\right) \sin \mu_s x;$$
$$\lambda_k = k\pi,\ \mu_s = 2s\pi / \gamma,\ \ (s = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{6}$$

$$w_{S-A} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \left(A_k \operatorname{ch} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \beta_k x\right) \sin \lambda_k y + \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} \left(C_s \operatorname{sh} \xi_s y + D_s \operatorname{sh} \eta_s y\right) \cos \mu_s x;$$
$$\lambda_k = 2k\pi,\ \mu_s = s\pi / \gamma,\ (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{7}$$

Здесь A_k, B_k, C_s, D_s — неопределенные коэффициенты (различные для каждого ряда): $\alpha_k = \sqrt{\lambda_k^2 + \Omega}$; $\beta_k = \sqrt{\lambda_k^2 - \Omega}$; $\xi_s = \sqrt{\mu_s^2 + \Omega}$; $\eta_s = \sqrt{\mu_s^2 - \Omega}$.

Ряды (4) – (7) удовлетворяют уравнению собственных колебаний (1) за счет коэффициентов (8). Потребуем, чтобы эти ряды удовлетворяли и всем граничным условиям (2), (3). Тогда используя разложения гиперболических функций в соответствующие ряды Фурье и переставляя затем знаки суммирования в двойных рядах, после преобразований получим бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно одной последовательности коэффициентов A_k («базовых» коэффициентов):

$$A_K^* = \frac{64\Omega^2 \lambda_K^2}{\gamma p_K} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_s^2}{\left[\left(\lambda_K^2 + \mu_s^2\right)^2 - \Omega^2\right] q_s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^*}{\left(\lambda_k^2 + \mu_s^2\right)^2 - \Omega^2}\ . \tag{8}$$

Для того чтобы избежать путаницы в индексах, в формуле (8) используются буквы k и K. Заметим, что выражение (8) содержит неизвестную частоту Ω.

Для решения $S - S$ принято: k, s = 1, 3, …,

$$A_k^* = A_k \lambda_k \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k,\ p_k = \alpha_k \operatorname{th} \tilde{\alpha}_k - \beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k,\ q_s = \xi_s \operatorname{th} \tilde{\xi}_s - \eta_s \operatorname{th} \tilde{\eta}_s; \tag{9}$$

для решения $A - A$ — k, s = 1, 2, ...,

$$A_k^* = A_k \lambda_k \operatorname{sh} \tilde{\beta}_k,\ p_k = \alpha_k \operatorname{cth} \tilde{\alpha}_k - \beta_k \operatorname{cth} \tilde{\beta}_k,\ q_s = \xi_s \operatorname{cth} \tilde{\xi}_s - \eta_s \operatorname{cth} \tilde{\eta}_s; \tag{10}$$

для решения $A - S$ — $k = 1,\ 3,\ \ldots;\ s = 1,\ 2,\ \ldots,$

$$A_k^* = A_k \lambda_k \operatorname{sh} \tilde{\beta}_k,\ p_k = \alpha_k \operatorname{cth} \tilde{\alpha}_k - \beta_k \operatorname{cth} \tilde{\beta}_k,\ q_s = \xi_s \operatorname{th} \tilde{\xi}_s - \eta_s \operatorname{th} \tilde{\eta}_s; \tag{11}$$

для решения $S - A$ — $k = 1,\ 2,\ \ldots;\ s = 1,\ 3,\ \ldots,$

$$A_k^* = A_k \lambda_k \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k,\ p_k = \alpha_k \operatorname{th} \tilde{\alpha}_k - \beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k,\ q_s = \xi_s \operatorname{cth} \tilde{\xi}_s - \eta_s \operatorname{cth} \tilde{\eta}_s. \tag{12}$$

В свою очередь, в формулах (9) – (12) введены обозначения: $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k \gamma / 2$; $\tilde{\beta}_k = \beta_k \gamma / 2$.

Коэффициенты B_k, C_s, D_s рядов (4) – (7) связаны с «базовым» коэффициентом A_k следующими зависимостями:

$$S-S:\qquad B_k=-A_k\frac{\operatorname{ch}\tilde{\alpha}_k}{\operatorname{ch}\tilde{\beta}_k};\ D_s=-C_s\frac{\operatorname{ch}\tilde{\xi}_s}{\operatorname{ch}\tilde{\eta}_s};\ C_s=-\frac{8\Omega\mu_s}{\gamma q_s\operatorname{ch}\tilde{\xi}_s}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\lambda_k\operatorname{ch}\tilde{\beta}_k}{\left(\lambda_k^2+\mu_s^2\right)^2-\Omega^2}A_k;\tag{13}$$

$$A-A:\qquad B_k=-A_k\frac{\operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k}{\operatorname{sh}\tilde{\beta}_k};\ D_s=-C_s\frac{\operatorname{sh}\tilde{\xi}_s}{\operatorname{sh}\tilde{\eta}_s};\ C_s=-\frac{8\Omega\mu_s}{\gamma q_s\operatorname{sh}\tilde{\xi}_s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k\operatorname{sh}\tilde{\beta}_k}{\left(\lambda_k^2+\mu_s^2\right)^2-\Omega^2}A_k;\tag{14}$$

$$S-S:\qquad B_k=-A_k\frac{\operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k}{\operatorname{sh}\tilde{\beta}_k};\ D_s=-C_s\frac{\operatorname{ch}\tilde{\xi}_s}{\operatorname{ch}\tilde{\eta}_s};\ C_s=-\frac{8\Omega\mu_s}{\gamma q_s\operatorname{ch}\tilde{\xi}_s}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\lambda_k\operatorname{sh}\tilde{\beta}_k}{\left(\lambda_k^2+\mu_s^2\right)^2-\Omega^2}A_k;\tag{15}$$

$$S-A:\qquad B_k=-A_k\frac{\operatorname{ch}\tilde{\alpha}_k}{\operatorname{ch}\tilde{\beta}_k};\ D_s=-C_s\frac{\operatorname{sh}\tilde{\xi}_s}{\operatorname{sh}\tilde{\eta}_s};\ C_s=-\frac{8\Omega\mu_s}{\gamma q_s\operatorname{sh}\tilde{\xi}_s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k\operatorname{ch}\tilde{\beta}_k}{\left(\lambda_k^2+\mu_s^2\right)^2-\Omega^2}A_k.\tag{16}$$

Для определения собственных частот и форм колебаний определитель системы (8) должен быть равен нулю, что приведет к трансцендентному уравнению, из которого находится бесконечная последовательность собственных частот Ω_i. Каждой частоте будет соответствовать своя форма колебаний (4) – (7).

Получение частотного трансцендентного уравнения в развернутом виде и его решение является сложной математической задачей. Избежать этих трудностей можно, если рассматривать систему (8) как готовый алгоритм её решения *методом последовательных приближений*. Коэффициенты A_k^* в правой части системы (8) считаются предыдущей итерацией A_{kN}^*, а коэффициенты в левой части — последующей итерацией $A_{k(N+1)}^*$. Далее подбираются значения частоты Ω_j, при которых метод последовательных приближений, организованный по формуле (8), приводит, начиная с некоторой итерации, к равенствам $A_{k(N+1)}^*=A_{kN}^*\neq 0$. В качестве начального приближения можно принять все $A_{k0}^*=1$. Найденные таким образом частоты и будут искомыми частотами свободных колебаний, а найденные коэффициенты $A_{k(N+1)}^*$ (с точностью до постоянного множителя) дадут соответствующую форму колебаний. Следует заметить, что поиск простым перебором Ω с изменяющимся шагом и проверка собственных значений не занимает много времени ввиду простоты вычислений по формуле (8).

С учетом формул (13) – (16) выражения для форм колебаний (4) – (7) можно записать для одной последовательности коэффициентов A^*_{ik} (i — номер собственной частоты):

$$\begin{gathered}w_{i,S-S}=\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{k}}A_{ik}^*}{\lambda_k}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha_k x}{\operatorname{ch}\tilde{\alpha}_k}-\frac{\operatorname{ch}\beta_k x}{\operatorname{ch}\tilde{\beta}_k}\right)\times\\ \times\cos\lambda_k y-\frac{8\Omega_i}{\gamma}\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{s}}\mu_s}{q_s}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi_s y}{\operatorname{ch}\tilde{\xi}_s}-\frac{\operatorname{ch}\eta_s y}{\operatorname{ch}\tilde{\eta}_s}\right)\left(\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{A_{ik}^*}{\left(\lambda_k^2+\mu_s^2\right)^2-\Omega_i^2}\right)\cos\mu_s x;\end{gathered}\tag{17}$$

$$\begin{gathered}w_{i,A-A}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}A_{ik}^*}{\lambda_k}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha_k x}{\operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k}-\frac{\operatorname{sh}\beta_k x}{\operatorname{sh}\tilde{\beta}_k}\right)\times\\ \times\sin\lambda_k y-\frac{8\Omega_i}{\gamma}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s}\mu_s}{q_s}\left(\frac{\operatorname{sh}\xi_s y}{\operatorname{sh}\tilde{\xi}_s}-\frac{\operatorname{sh}\eta_s y}{\operatorname{sh}\tilde{\eta}_s}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{ik}^*}{\left(\lambda_k^2+\mu_s^2\right)^2-\Omega_i{}^2}\right)\sin\mu_s x;\end{gathered}\tag{18}$$

$$\begin{gathered}w_{i,A-S}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}A_{ik}^*}{\lambda_k}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha_k x}{\operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k}-\frac{\operatorname{sh}\beta_k x}{\operatorname{sh}\tilde{\beta}_k}\right)\times\\ \times\cos\lambda_k y-\frac{8\Omega_i}{\gamma}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s}\mu_s}{q_s}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi_s y}{\operatorname{ch}\tilde{\xi}_s}-\frac{\operatorname{ch}\eta_s y}{\operatorname{ch}\tilde{\eta}_s}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{ik}^*}{\left(\lambda_k^2+\mu_s^2\right)^2-\Omega_i{}^2}\right)\sin\mu_s x;\end{gathered}\tag{19}$$

$$w_{i,S-A} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A_{ik}^*}{\lambda_k} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha_k x}{\operatorname{ch} \tilde{\alpha}_k} - \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{ch} \tilde{\beta}_k} \right) \times$$

$$\times \sin \lambda_k y - \frac{8\Omega_i}{\gamma} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \mu_s}{q_s} \left(\frac{\operatorname{sh} \xi_s y}{\operatorname{sh} \tilde{\xi}_s} - \frac{\operatorname{sh} \eta_s y}{\operatorname{sh} \tilde{\eta}_s} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}^*}{\left(\lambda_k^2 + \mu_s^2\right)^2 - \Omega_i^2} \right) \cos \mu_s x. \quad (20)$$

Численные результаты

Для численной реализации предложенного метода была составлена программа в системе аналитических вычислений Maple. Все коэффициенты A_{k0}^* начального приближения принимались равными единице. Число приближений (итераций) — от 12 до 25. Число членов в рядах в окончательных расчетах принималось равным 49. Дальнейшее увеличение количества слагаемых в рядах и числа итераций практически не увеличивало точность вычислений (до шести значащих цифр). В качестве примера вычислялись собственные частоты квадратной пластины, а также прямоугольной пластины с отношением сторон 2 : 1. Они представлены в первой строке табл. 1 и 2. Были получены также трехмерные изображения соответствующих форм колебаний (здесь не приводятся).

Обсуждение результатов и их сравнение

В табл. 1 и 2 для сравнения в хронологическом порядке приведены результаты других авторов [1] – [21] (заметим, что для пластины с отношением сторон $\gamma = 2$ численных результатов известно гораздо меньше, чем для квадратной). Численные результаты, заимствованные из работ [1] – [3], [13], умножались на π^2, чтобы привести их к формуле для относительной частоты, используемой в настоящей работе. Для пересчета частотных коэффициентов, приведенных в работе [11], из них извлекался квадратный корень и результат умножался на π^2.

Таблица 1

Относительные частоты $\Omega = pb^2 \sqrt{\rho h / D}$ собственных колебаний квадратной пластины (СССС) для $\nu = 0{,}3$

Результаты, полученные в работе	Ω_1 *S–S*	Ω_2 *A–S*	Ω_3 *A–A*	Ω_4	Ω_5 *S–S*	Ω_6 *A–S*	Ω_7 *A–S*	Ω_8 *S–S*	Ω_9 *A–A*
	35,985	73,394	108,216	–	132,208	164,998	210,522	220,032	243,157
Результаты других авторов									
Sezawa [1]	37,455	74,841	108,121	–	134,226	–	–	–	–
Tomatika [2]	35,728	75,009	107,780	–	130,770	160,380	–	–	239,340
Iguchi [3]	35,984	73,400	108,220	–	132,183	164,990	–	–	243,098
Young [4]	35,990	73,410	108,270	131,64	132,250	165,150	–	–	–
Odman [12]	35,999	73,405	108,237	–	131,900	165,023	210,526	220,060	242,660
Болотин [14]	35,096	72,897	107,470	–	131,630	164,388	210,351	219,322	242,200
Филиппов [5]	35,965	73,390	108,071	–	130,770	164,980	210,191	220,130	243,080
Вайнберг [13]	35,985	73,400	108,220	–	132,184	164,990	–	–	243,098
Leissa [6]	35,992	73,413	108,270	131,64	132,240	–	–	–	–
Dickinson [7]	35,988	73,406	108,250	131,62	132,230	–	–	–	–
Bhat [8]	35,985	73,395	108,218	131,78	132,410	–	–	–	–
Liew [9]	35,990	73,410	108,260	131,66	–	–	–	–	–
Bardell [15]	35,990	73,390	108,220	–	–	–	–	–	–
Ng [17]	35,989	73,407	108,249	131,62	132,244	165,074	–	–	–
Shu [19]	35,985	73,394	108,210	131,58	132,200	165,000	–	–	–
Reutsky [21]	35,983	73,387	108,202	131,58	132,228	165,030	210,519	219,932	242,155
Kerboua [16]	35,450	72,030	103,700	129,41	130,280	–	–	–	–
Нестеров [11]	36,053	73,439	108,535	–	131,910	165,135	210,530	220.475	242,717
Wang [18]	35,986	73,399	108,230	131,57	132,220	–	–	–	–
Saini [20]	35,985	73,394	–	–	–	–	–	–	–

Примечание. СССС — защемленная с четырех сторон пластина.

Анализ результатов табл. 1 показывает, что частота Ω_4 была найдена не всеми авторами, которые занимались поиском обертонов более высокого порядка. В частности, она «пропущена» не только в настоящей работе, но и в работах [1] – [3], [5], [11] – [14]. Проверка значений частот Ω_4 и близких к ним, найденных другими авторами, не дала подтверждения, что это какой-либо обертон свободных колебаний. Близость частот Ω_4 и Ω_5 свидетельствует о том, что это, скорее всего, одна и та же частота, вычисленная рядом авторов с погрешностью при замене x на y в расчетных формулах.

К результатам, полученным в настоящей работе для квадратной пластины, наиболее близки результаты S. Iguchi [3] и, возможно, Д. В. Вайнберга [13], хотя у них помимо частоты Ω_4, не найдены частоты Ω_7 и Ω_8, а также А. П. Филиппова [5] (за исключением частоты Ω_5) и S. Yu. Reutskiy [21], за исключением частоты Ω_9, т. е. те результаты, которые были получены при более строгом выполнении граничных условий задачи. Следует отметить, что главная (первая) частота совпадает у многих авторов: [3], [7], [8], [13], [18] – [21], по остальным частотам наблюдается заметное расхождение.

Таблица 2

Относительные частоты $\Omega = pb^2\sqrt{\rho h / D}$ собственных колебаний прямоугольной пластины (СССС, $\gamma = 2$, $\nu = 0{,}3$)

Результаты, полученные в работе	Ω_1 *S–S*	Ω_2 *S–A*	Ω_3 *S–S*	Ω_4 *S–A*	Ω_5 *A–S*	Ω_6 *A–A*	Ω_7 *A–S*	Ω_8 *S–S*	Ω_9 *A–A*
	24,578	31,826	44,770	63,331	63,983	71,076	83,273	87,253	100,792
Результаты других авторов									
Болотин [14]	24,092	31,395	44,354	62,998	63,925	70,903	82,905	–	100,176
Bhat [10]	24,578	31.827	44,808	63,570	63,985	71,079	–	–	–

Первые шесть частот, полученные в настоящей работе для $\gamma = 2$, практически совпадают с результатами R. B. Bhat [10] (специальные ортогональные полиномы в методе Ритца).

Выводы

1. Предложенный метод отыскания собственных частот отличается простым алгоритмом, быстротой и высокой точностью вычислений. Это подтверждает сравнительный анализ результатов, полученных в настоящей работе и в работах других авторов.

2. Данный метод может использоваться и для прямоугольных пластин с другими видами граничных условий (консольная пластина, пластина с тремя защемленными и одной свободной краями и др.), а также для динамических расчетов по сдвиговым теориям (пластины типа Тимошенко).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sezawa K.* On the lateral vibration of a rectangular plate clamped at four edges / K. Sezawa // Report of the Aeronautical Research Institute of Tokyo University. — 1931. — Vol. 6. — № 70. — Pp. 61–70.

2. *Tomotika S.* LX. The transverse vibration of a square plate clamped at four edges / S. Tomatika // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science: Series 7. — 1936. — Vol. 21. — Is. 142. — Pp. 745–760. DOI:10.1080/14786443608561622.

3. *Iguchi S.* Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte / S. Iguchi // Ingenieur-Archiv. — 1937. — Vol. 8. — Is. 1. — Pp. 11–25. DOI: 10.1007/BF02086517.

4. *Young D.* Vibration of rectangular plates by the Ritz method / D. Young // Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME. — 1950. — Vol. 17. — Is. 4. — Pp. 448–453.

5. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. — М.: Машиностроение, 1970. — 734 с.

6. *Leissa A. W.* The free vibration of rectangular plates / A. W. Leissa // Journal of Sound and Vibration. —1973. — Vol. 31. — Is. 3. — Pp. 257–293. DOI: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2.

7. *Dickinson S. M.* On the use of simply supported plate functions in the Rayleigh-Ritz method applied to the flexural vibration of rectangular plates / S. M. Dickinson, E. K. H Li // Journal of Sound and Vibration. —1982. — Vol. 80. — Is. 2. — Pp. 292–297. DOI:10.1016/0022-460X(82)90199-7.

8. *Bhat R. B.* Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method / R. B. Bhat // Journal of Sound and Vibration. — 1985. — Vol. 102. — Is. 4. — Pp. 493–499. DOI:10.1016/S0022-460X(85)80109-7.

9. *Liew K. M.* Free vibration analysis of rectangular plate using orthogonal plate function / K. M. Liew, K. Y. Lam, S. T. Chow // Computers and Structures. — 1990. — Vol. 34. — Is. 1. — Pp. 79–85. DOI: 10.1016/0045-7949(90)90302-I.

10. *Bhat R. B.* Numerical experiments on the determination of natural frequencies of transverse vibrations of rectangular plates of non-uniform thickness / R. B. Bhat, P. A. A Laura, R. G. Gutierrez, V. H. Cortinez, H. C. Sanzi // Journal of Sound and Vibration. — 1990. — Vol. 138. — Is. 2. — Pp. 205–219. DOI: 10.1016/0022-460X(90)90538-B.

11. *Нестеров С. В.* Изгибные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру / С. В. Нестеров // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2011. — № 6. — С. 159–165.

12. *Odman S. T. A.* Studies of boundary value problems. Part II. Characteristic functions of rectangular plates / S. T. A. Odman // Proc. NR 24. — Swedish Cement and Concrete Research Institute of Technology, 1955. — P. 7.

13. *Вайнберг Д. В.* Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин / Д. В. Вайнберг. — Киев: Изд-во «Будівельник», 1973. — 488 с.

14. *Болотин В. В.* Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок / В. В. Болотин // Известия АН СССР. Инженерный сборник. — 1961. — Т. 31. — С. 3–14.

15. *Bardell N. S.* Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method / N. S. Bardell // Journal of Sound and Vibration. — 1991. — Vol. 151. — Is. 2. — Pp. 263–289. DOI:10.1016/0022-460X(91)90855-E.

16. *Kerboua Y.* Hybrid method for vibration analysis of rectangular plates / Y. Kerboua, A. A. Lakis, M. Thomas, L. Marcouiller // Nuclear Engineering and Desing. — 2007. — Vol. 237. — Is. 8. — Pp. 791–801. DOI:10.1016/j.nucengdes.2006.09.025.

17. *Ng C. H. W.* Comparison of discrete singular convolution and generalized differential quadrature for the vibration analysis of rectangular plates / C. H. W. Ng, Y. B. Zhao, G. W. Wei // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2004. — Vol. 193. — Is. 23–26. — Pp. 2483–2506. DOI: 10.1016/j.cma.2004.01.013.

18. *Wang X.* Free vibration analysis of beams and rectangular plates with free edges by the discrete singular convolution / X. Wang, S. Xu // Journal of Sound and Vibration. — 2010. — Vol. 329. — Is. 10. — Pp. 1780–1792. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.12.006.

19. *Shu C.* Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates / C. Shu, H. Du // International Journal of Solids and Structures. — 1997. — Vol. 34. — Is. 7. — Pp. 819–835. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00057-1.

20. *Saini R.* Transverse Vibration of Non-Homogeneous Rectangular Plates of Variable Thickness Using GDQ / R. Saini, R. Lal // World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering. — 2014. — Vol. 8. — No. 9. — Pp. 1197–1202.

21. *Reutskiy S. Yu.* The Method of fundamental solutions for problems of free vibrations of plates / S. Yu. Reutskiy // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2007. — Vol. 31. — Is. 1. — Pp. 10–21. DOI: 10.1016/j.enganabound.2006.06.004.

22. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. — М.-Л.: ОГИЗ – ГИТТЛ, 1947. — 355 с.

23. *Барышников С. О.* Вычисление частот и форм собственных колебаний панелей обшивки судна // Журнал Университета водных коммуникаций / С. О. Барышников, М. В. Сухотерин. — 2012. — № 3. — С. 94а–103.

NATURAL VIBRATIONS OF THIN RECTANGULAR ELEMENTS OF SHIP STRUCTURES

This article provides a solution to the problem of natural vibrations of clamped along the contour of a rectangular plate, Kirchhoff using two hyperbola-trigonometric series in two coordinates, satisfying the basic *differential equation of the problem. If all the boundary conditions obtained infinite system of linear algebraic equations for the four sequences of unknown coefficients of the series which is reduced to an infinite system with respect to one sequence of coefficients, containing as a parameter the frequency of the oscillations. Brute force this setting, the changing step are frequency, giving a non-trivial solution of the infinite system, i.e. the natural frequencies.*

The resulting spectrum of natural frequencies compared to frequencies found by other authors. The accuracy of calculations and the effectiveness of approximate methods are analyzes. It is shown that the natural frequencies found in the present work the proposed method are very accurate when you hold in the ranks of the 49 members. It is established that a further increase in the number of members in the ranks does not affect the precision of calculation of eigenfrequencies.

Keywords: natural oscillations, rectangular plate clamped, Fourier series, numerical results.

REFERENCES

1. Sezawa, Katsutada. "On the Lateral Vibration of a Rectangular Plate Clamped at four Edges." *Report of the Aeronautical Research Institute of Tokyo University* 6.70 (1931): 61–70.

2. Tomotika, S. "LX. The transverse vibration of a square plate clamped at four edges." *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science: Series 7* 21.142 (1936): 745–760. DOI: 10.1080/14786443608561622.

3. Iguchi, S. "Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte." *Ingenieur-Archiv* 8.1 (1937): 11–25. DOI: 10.1007/BF02086517.

4. Young, Dana. "Vibration of rectangular plates by the Ritz method." *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME* 17.4 (1950): 448–453.

5. Filippov, A. P. *Kolebanija deformiruemyh sistem*. M.: Izd-vo "Mashinostroenie", 1970.

6. Leissa, Arthur W. "The free vibration of rectangular plates." *Journal of Sound and Vibration* 31.3 (1973): 257–293. DOI: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2.

7. Dickinson, S. M., and E. K. H Li. "On the use of simply supported plate functions in the Rayleigh-Ritz method applied to the flexural vibration of rectangular plates." *Journal of Sound and Vibration* 80.2 (1982): 292–297. DOI:10.1016/0022-460X(82)90199-7.

8. Bhat, R. B. "Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method." *Journal of Sound and Vibration* 102.4 (1985): 493–499.

9. Liew, K. M., K. Y. Lam, and S. T. Chow. "Free vibration analysis of rectangular plates using orthogonal plate function." *Computers & Structures* 34.1 (1990): 79–85. DOI: 10.1016/0045-7949(90)90302-I.

10. Bhat, R. B., P. A. A Laura, R. G. Gutierrez, V. H. Cortinez, and H. C. Sanzi. "Numerical experiments on the determination of natural frequencies of transverse vibrations of rectangular plates of non-uniform thickness." *Journal of Sound and Vibration* 138.2 (1990): 205–219. DOI: 10.1016/0022-460X(90)90538-B.

11. Nesterov, S. V. "Flexural vibration of a square plate clamped along its contour." *Mechanics of Solids* 46.6 (2011): 946–951.

12. Odman, S. T. A. "Studies of boundary value problems. Part II. Characteristic functions of rectangular plates." *Proc. NR 24*. Swedish Cement and Concrete Research Institute of Technology, 1955:7.

13. Vajnberg, D. V. *Spravochnik po prochnosti, ustojchivosti i kolebanijam plastin*. Kiev: Izd-vo «Budivel'nik», 1973.

14. Bolotin, V. V. "Dinamicheskij kraevoj jeffekt pri uprugih kolebanijah plastinok." *Izvestija AN SSSR. Inzhenernyj sbornik* 31 (1961): 3–14.

15. Bardell, N. S. "Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method." *Journal of sound and vibration* 151.2 (1991): 263–289. DOI:10.1016/0022-460X(91)90855-E.

16. Kerboua, Y., A. A. Lakis, M. Thomas, and L. Marcouiller. "Hybrid method for vibration analysis of rectangular plates." *Nuclear Engineering and Desing* 237.8 (2007): 791–801. DOI:10.1016/j.nucengdes.2006.09.025.

17. Ng, C. H. W., Y. B. Zhao, and G. W. Wei. "Comparison of discrete singular convolution and generalized differential quadrature for the vibration analysis of rectangular plates." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.23 (2004): 2483–2506. DOI: 10.1016/j.cma.2004.01.013.

18. Wang, Xinwei, and Suming Xu. "Free vibration analysis of beams and rectangular plates with free edges by the discrete singular convolution." *Journal of Sound and Vibration* 329.10 (2010): 1780–1792. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.12.006.

19. Shu, C., and H. Du. “Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates.” *International Journal of Solids and Structures* 34.7 (1997): 819–835. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00057-1.

20. Saini, R., and R. Lal. “Transverse Vibration of Non-Homogeneous Rectangular Plates of Variable Thickness Using GDQ.” *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering* 8.9 (2014): 1197–1202.

21. Reutskiy, S. Yu. “The method of fundamental solutions for problems of free vibrations of plates.” *Engineering Analysis with Boundary Elements* 31.1 (2007): 10–21. DOI: 10.1016/j.enganabound.2006.06.004

22. Lehnickij, S. G. *Anizotropnye plastinki*. M.–L.: OGIZ-GITTL, 1947.

23. Baryshnikov, S. O., and M. V. Suhoterin. “Computation of frequency and forms of free oscillations of panels of a ship shell.” *Zhurnal Universiteta vodnyh kommunikacij* 3 (2012): 94a–103.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сухотерин Михаил Васильевич —
доктор технических наук, профессор.
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С.О. Макарова»
kaf_math@gumrf.ru
Барышников Сергей Олегович —
доктор технических наук, профессор.
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С.О. Макарова»
rector@gumrf.ru
Аксенов Дмитрий Андреевич — аспирант.
Научный руководитель:
Сухотерин Михаил Васильевич.
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С.О. Макарова»
kaf_math@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sukhoterin Mikhail Vasil’evich —
Dr. of Technical Sciences, professor.
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
kaf_math@gumrf.ru
Baryshnikov Sergej Olegovich —
Dr. of Technical Sciences, professor.
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
rector@gumrf.ru
Aksenov Dmitrij Andreevich — postgraduate.
Supervisor:
Sukhoterin Mikhail Vasil’evich.
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
kaf_math@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 9 июня 2016 г.

DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-4-113-121
УДК 629.122

Е. В. Купальцева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАССАЖИРОВМЕСТИМОСТИ «МАЛОГО» ПАССАЖИРСКОГО СУДНА НА НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Рассмотрено два метода определения пассажировместимости «малых» пассажирских судов. Первый метод основан на решении уравнения, где искомой является величина минимально возможной площади пассажирской палубы судна, необходимой для размещения заданного числа пассажиров. Входящие в данное уравнение неизвестные определены на основе статистического анализа. Уровень комфортабельности задается принимаемой удельной полезной площадью, предназначенной для размещения одного пассажира. Второй метод основан на определении необходимых размеров судна в зависимости от заданной пассажировместимости. Длина судна в этом случае представлена в виде суммы длин отсеков, находящихся в корпусе. При расчете ширины судна учитывается рядность, габариты магистрального коридора, зашивка переборок и стенок судна. Проведена проверка адекватности предложенных методов, результаты которой позволяют судить о достоверности полученных данных.

Ключевые слова: пассажирское судно, уравнение пассажировместимости, размерения судна, уровень комфортабельности, компоновка судна.