DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-6-1159-1167

ASSESSMENT OF A METHOD ERROR OF DEAD RECKONING OF A VESSEL'S LATITUDE

V. V. Deryabin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

An expression for an upper limit of an absolute value of a method error of dead reckoning for a vessel's geodetic latitude has been derived. The error occurs due to simplification of a corresponding dead reckoning equation. The simplification of the equation is a conversion of an integrated function which depends on latitude and cannot be expressed as an elementary function to a function value at a minimum value of latitude. The expression for the upper limit is true when a geodetic height of a ship is constant during her motion. It does not take into account computational error and other method error resulting from integration of a northern velocity component as well. Dependencies of the upper limit have been analysed. The upper limit depends on a maximum absolute value of a northern speed; geodetic height; semi-major axis and eccentricity of an ellipsoid; a difference between maximum and minimum of an absolute value of latitude. It has been determined when the method error takes a maximum absolute value. Corresponding error calculations have been carried out for different speed modes and time of a vessel's sailing. A distinctive feature of the proposed method of solving of dead reckoning equation is, that it is possible to get the upper limit of the absolute value of the method error on the basis of a maximum absolute value of a ship's northern speed within a certain time interval and of its length. Being complemented with corresponding expressions for a geodetic longitude, proposed calculation methods may be used for testing of other dead reckoning algorithms.

Keywords: vessel's geodetic latitude, dead reckoning formulas, Cauchy'stask, approximate solution, method error, upper limit.

For citation:
Deryabin, Victor V. "Assessment of a method error of dead reckoning of a vessel's latitude." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 9.6 (2017): 1159–1167. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-6-1159-1167.

УДК. 656.61.052:527.61

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СЧИСЛЕНИЯ ШИРОТЫ СУДНА

В. В. Дерябин

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Получено выражение для верхней границы модуля погрешности метода счисления геодезической широты судна, возникающей в результате упрощения соответствующего уравнения счисления. Упрощение заключается в переходе от уравнения счисления широты, содержащего под знаком интеграла выражение, зависящее от широты и не выражающееся через её элементарные функции, к уравнению, где указанное выражение считается всегда равным его значению при минимальной по модулю широте. Выражение для верхней границы справедливо, когда при движении геодезическая высота судна остаётся постоянной. Оно не учитывает вычислительную погрешность, а также другую погрешность метода, связанную с интегрированием северной составляющей скорости. Проанализированы зависимости верхней границы модуля погрешности метода от максимального модуля северной составляющей скорости движения судна, его геодезической высоты, значений большой полуоси и эксцентриситета эллипсоида вращения, разности наибольшего и наименьшего значений модулей широты. Определены условия, когда погрешность достигает наибольшего по модулю значения. Проведены расчёты верхней границы модуля погрешности с использованием выведенного соотношения для различных скоростных режимов и продолжительности плавания судна. Отличительной особенностью предлагаемого варианта приближённого решения уравнения счисления для широты является возможность получения верхней границы модуля погрешности метода, воз-

никающей в результате упрощения уравнения счисления, на основе наибольшего значения модуля северной составляющей скорости в пределах данного отрезка времени и его длины. Предлагаемые расчётные соотношения, дополненные соответствующими выражениями для долготы, могут использоваться для тестирования других алгоритмов счисления.

Ключевые слова: геодезическая широта судна, формулы счисления, задача Коши, приближённое решение, погрешность метода, верхняя граница.

Для цитирования:
Дерябин В. В. Оценка погрешности метода счисления широты судна / В. В. Дерябин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2017. — Т. 9. — № 6. — С. 1159–1167. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-6-1159-1167.

Введение

Любая система счисления характеризуется постепенной потерей точности в результате действия ряда причин. К таким причинам относятся неопределённости исходных данных, вычислительные процедуры, а также использование приближённых методов решения задачи. Изучению влияния погрешностей на точность счислимого места судна посвящено большое количество исследований. Однако они имеют определённые ограничения. Например, в работах [1]–[6] рассматриваются в основном погрешности исходных данных. Остальные же источники погрешностей изучены в меньшей степени или не рассматриваются вообще. В частности, недостаточно исследован вопрос, связанный с погрешностью используемого метода. При выборе геометрической поверхности, на которой выполняется счисление, более корректным является решение задачи счисления на эллипсоиде вращения, чем на сфере. В такой постановке задача формулируется, например, в работах [7], [8]. Постановка задачи на эллипсоиде приводит к системе дифференциальных уравнений, решить которую точными методами в настоящее время невозможно.

Уравнение счисления для широты может быть представлено в виде уравнения с разделяющимися переменными, точное решение которого невозможно получить по двум причинам. Во-первых, в левой части широта является аргументом функции, первообразная которой не выражается через элементарные функции широты. Во-вторых, в правой части северная составляющая скорости судна (как функция времени) не имеет аналитического описания и, следовательно, её первообразная также не может быть выражена через элементарные функции времени. Так как нет точного решения для широты, то и для долготы также не будет точного решения, поскольку уравнение счисления долготы содержит широту. Остаётся лишь использовать приближённые методы, которые представлены двумя основными подходами к решению дифференциальных уравнений.

Первый подход заключается в использовании численных методов, которые представлены двумя большими группами. Первую группу образуют методы Рунге-Кутта [9], [10]. Для оценки их погрешности требуется знание производных искомой (неизвестной) функции, начиная со второго порядка и выше. Точное значение указанных производных невозможно получить, так как искомая функция не задана аналитически. Предельные значения указанных производных можно оценить лишь на основе той или иной методики, полную адекватность которой невозможно гарантировать. Даже для оценки погрешности метода Эйлера требуется оценить сверху модуль северной составляющей ускорения судна, что сделать не так просто, как для соответствующей составляющей скорости. Для оценки границ производных скорости более высокого порядка получить решение ещё сложнее. Вторую группу образуют разностные методы (формулы Адамса являются наиболее употребительными). В их основу положена замена производной искомой функции (правой части уравнения в задаче Коши) интерполирующей функцией, которая выражается через элементарные функции и поэтому легко интегрируется точно. Фактический вид заменяемой функции неизвестен. Оценить степень её отклонения от интерполирующей функции можно по значениям производных от заменяемой функции. Указанные производные могут быть оценены лишь приближённо. Таким образом, основная проблема использования численных методов для интегрирования широтного уравнения счисления заключается в том, что точно оценить погрешность метода невозможно, так как невозможно точно определить промежутки возможных значений северной составляющей ускорения и её производных.

В работе [7] предлагается приближённое решение поставленной задачи, базирующееся на трёх принципах:

– замене производной дуги меридиана по широте отношением соответствующих конечных приращений;

– предположении о постоянстве курса в пределах промежутка времени, длина которого выбрана в качестве дискретности при расчётах;

– предположении о постоянстве радиуса кривизны меридиана в пределах указанного промежутка.

Очевидно, что этот путь близок к численному интегрированию, и, следовательно, имеет указанный ранее недостаток.

Второй подход состоит в использовании упрощений, позволяющих решить широтное дифференциальное уравнение с гарантированной точностью. Такое решение можно использовать для тестирования других алгоритмов счисления на стадии разработки или применения в навигационной аппаратуре. Целью настоящего исследования является получение соотношения для верхней границы модуля погрешности метода счисления геодезической широты судна, возникающей в результате упрощения соответствующего уравнения счисления, основанного на сохранении третьего принципа, но не использующего первый и второй принципы.

Математическая формулировка задачи

Дифференциальные уравнения счисления пути судна, движущегося по поверхности эллипсоида, имеют следующий вид [11], [12]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{V_N}{M}; \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{V_E}{N\cos\varphi}, \end{aligned} \tag{1}$$

где φ, λ — геодезические широта и долгота центра тяжести судна; V_N и V_E — северная (по направлению меридиана) и восточная (по направлению параллели) составляющие абсолютной скорости судна; K — истинный курс судна; M — радиус кривизны меридианного эллипса «h-эллипсоида» [11] в точке, где расположен центр тяжести судна; N — радиус кривизны первого вертикала «h-эллипсоида» в той же точке.

Главные радиусы кривизны зависят от широты φ и определяются следующим образом:

$$M = \frac{(a+h)(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}; \;\; N = \frac{a+h}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

где a — большая полуось эллипсоида; e — эксцентриситет меридианного эллипса; h — геодезическая высота центра тяжести судна, которую в дальнейшем будем считать величиной постоянной.

Перепишем соотношения (1) с учётом выражений, определяющих радиусы кривизны:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{(a+h)(1-e^2)}\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}V_N(t); \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{1}{a+h}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}V_E(t) \end{aligned} \tag{2}$$

или в сокращённой форме:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= f(t,\ \varphi); \\ \frac{d\lambda}{dt} &= g(t,\ \varphi), \end{aligned} \tag{3}$$

где f, g — некоторые непрерывные функции.

Уравнения (3) образуют частный случай нормальной системы дифференциальных уравнений, правые части которых не зависят от долготы λ. При этом сначала необходимо решить первое уравнение, а затем уже второе, так как в последнем фигурирует значение широты φ — решение первого уравнения. Поэтому сосредоточимся на решении первого уравнения в соотношениях (2):

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{(a+h)(1-e^2)}\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}V_N(t). \quad (4)$$

Это уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной $\frac{d\varphi}{dt}$, представленное в форме для задачи Коши. Перепишем уравнение (4) в виде уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}d\varphi=\frac{1}{(a+h)(1-e^2)}V_N(t)dt. \quad (5)$$

Применив к обеим частям уравнения (5) операцию интегрирования по времени на промежутке [0; t], получим соотношение:

$$\int_0^t\frac{1}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}d\varphi=\frac{1}{(a+h)(1-e^2)}\int_0^t V_N(t)dt. \quad (6)$$

Решение данного уравнения возможно только приближёнными методами ввиду следующих причин:

– подынтегральное выражение левой части не имеет первообразной, выражающейся в конечном виде через элементарные функции;

– подынтегральное выражение правой части также не имеет первообразной, которая выражается через элементарные функции в силу того, что на практике составляющая скорости $V_N(t)$ не имеет аналитического описания как функция времени, а задается в виде временной последовательности значений, полученных в результате измерений.

Рассмотрим вариант приближённого решения, связанного с указанной ранее первой причиной.

Вариант приближённого решения

Примем $\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}\equiv\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\min|\varphi|\right)\right)^3}$, где min|φ| — наименьшее возможное значение модуля широты в процессе плавания. Тогда в левой части получается разность значений широт φ(t) – φ(0), взятых в текущий и начальный моменты времени, умноженная на величину $1/\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\min|\varphi|\right)\right)^3}$. Возникает следующий вопрос: «*Какова погрешность, происходящая от подобной замены*?». Перепишем уравнение (4) с учётом начального условия φ(0) в следующем эквивалентном виде:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{1}{(a+h)(1-e^2)}\int_0^t\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}V_N(t)dt. \quad (7)$$

С учётом замены $\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}\equiv q_{\max}:=\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\min|\varphi|\right)\right)^3}$ переходим к приближённому уравнению

$$\tilde\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{q_{\max}}{(a+h)(1-e^2)}\int_0^t V_N(t)dt. \quad (8)$$

Разность соотношений (7) и (8) даёт абсолютную погрешность метода A, вызванную предположением, что $\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}\equiv\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\min|\varphi|\right)\right)^3}$:

$$A=\tilde\varphi(t)-\varphi(t)=\frac{1}{(a+h)(1-e^2)}\int_0^t\left[q_{\max}-\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right]V_N(t)dt. \quad (9)$$

Формулу (9) невозможно использовать для получения точного значения погрешности *A*, так как неизвестны широта φ(*t*) и северная составляющая абсолютной скорости судна $V_N(t)$ как аналитические функции, позволяющие точное вычисление интеграла правой части выражения (9).

Величина $q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3} \le q_{\max} - \sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\max|\varphi|\right)\right)^3}$ для любого момента времени *t*, где max|φ |— наибольшее из возможных значений модуля широты в процессе плавания. Введём обозначение $q_{\min} = \sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\max|\varphi|\right)\right)^3}$.

Если $V_N(t) \ge 0$ то $\left(q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right)V_N(t) \le \left(q_{\max} - q_{\min}\right)V_N(t)$. В противном случае, $\left(q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right)V_N(t) \ge \left(q_{\max} - q_{\min}\right)V_N(t)$.

При $V_N(t) \ge 0$

$$\int_0^t \left[q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right]V_N(t)dt \le \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\int_0^t V_N(t)dt \le \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\max[V_N(t)]\cdot t, \qquad (10)$$

где max $[V_N(t)]$ — наибольшее из возможных значений северной составляющей скорости в процессе плавания.

При отрицательных $V_N(t)$

$$\int_0^t \left[q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right]V_N(t)dt \ge \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\int_0^t V_N(t)dt \ge \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\min[V_N(t)]\cdot t, \qquad (11)$$

где min $[V_N(t)]$ — наименьшее из возможных значений составляющей северной скорости.

Сравнивая (10) и (11), получим следующее:

$$\left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\min[V_N(t)]\cdot t \le \int_0^t \left[q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right]V_N(t)dt \le \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\max[V_N(t)]\cdot t.$$

При условии, что $\max[V_N(t)] = -\min[V_N(t)] = \max|V_N(t)|$, можно сделать следующий вывод:

$$\left|\int_0^t \left[q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right]V_N(t)dt\right| \le \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\max|V_N(t)|\cdot t, \qquad (12)$$

где $\max|V_N(t)|$ — наибольший модуль северной составляющей скорости судна в процессе плавания.

Соотношение (12) справедливо, когда на всем промежутке времени *t* северная составляющая скорости $V_N(t)$ имеет либо только неотрицательные, либо только отрицательные значения. Но что делать, когда указанная функция знакопеременная и в процессе плавания *t* изменяет знак сколь угодно большое количество раз? Очевидно, следует использовать оценку (12) на каждом промежутке с постоянным знаком функции отдельно. Как только функция поменяет знак, нужно начинать оценку заново до следующего изменения знака функции. Пусть *m* — количество промежутков, на которых функция $V_N(t)$ сохраняет свой знак. Пусть каждый из таких промежутков имеет свою продолжительность: τ_1, τ_2, …, τ_m. Тогда применяя для каждого такого промежутка формулу (12), получим, что модуль интеграла в соотношении (12) на каждом промежутке ограничен сверху величинами $\left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\max|V_N(t)|\tau_1, \ldots, \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\max|V_N(t)|\tau_m$, т. е. имеют место следующие неравенства:

$$\left|\int_0^{\tau_1} \left[q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right]V_N(t)dt\right| \le \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\max|V_N(t)|\cdot\tau_1;$$

$$\left|\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} \left[q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right]V_N(t)dt\right| \le \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\max|V_N(t)|\cdot\tau_2; \qquad (13)$$

....

$$\left|\int_{\tau_1+\ldots+\tau_{m-1}}^{\tau_1+\ldots+\tau_m=t} \left[q_{\max} - \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right]V_N(t)dt\right| \le \left(q_{\max} - q_{\min}\right)\cdot\max|V_N(t)|\cdot\tau_m.$$

Складывая указанные неравенства, а также учитывая, что модуль суммы всегда не больше суммы модулей слагаемых, получаем соотношение, в точности совпадающее с выражением (12). Таким образом, соотношение (12) можно использовать и для случая, когда северная составляющая скорости меняет знак в процессе плавания, что характерно, например, при плавании вдоль параллели.

Результаты

Умножив обе части неравенства (12) на величину $1/\left((a+h)(1-e^2)\right)$, получим окончательную верхнюю границу модуля ошибки метода *A*, возникающей вследствие предположения, что $\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3} \equiv \sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\min|\varphi|\right)\right)^3}$:

$$\left|\frac{1}{(a+h)(1-e^2)}\int_0^t\left[q_{\max}-\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi(t))^3}\right]V_N(t)dt\right| \le \frac{1}{(a+h)(1-e^2)}\left(q_{\max}-q_{\min}\right)\cdot\max\left|V_N(t)\right|\cdot t$$

или в сокращённом виде

$$|A| \le \frac{1}{(a+h)(1-e^2)}\left(\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\min|\varphi|\right)\right)^3}-\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\max|\varphi|\right)\right)^3}\right)\cdot\max\left|V_N(t)\right|\cdot t. \quad (14)$$

Видно, что верхняя граница модуля погрешности зависит от времени линейно, а коэффициентом пропорциональности при этом выступает величина

$$k_A = \frac{1}{(a+h)(1-e^2)}\left(\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\min|\varphi|\right)\right)^3}-\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\max|\varphi|\right)\right)^3}\right)\cdot\max\left|V_N(t)\right|,$$

которую будем в дальнейшем называть *коэффициентом погрешности метода*, вызванной заменой величины $\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3} \equiv \sqrt{\left(1-e^2\sin^2\left(\min|\varphi|\right)\right)^3}$. Проанализировав данный коэффициент, можно сделать следующие заключения:

– чем больше большая полуось *a*, тем меньше коэффициент ошибки метода k_A и наоборот;

– чем больше постоянная высота над поверхностью эллипсоида *h*, тем меньше коэффициент k_A, и наоборот;

– чем больше максимальный модуль скорости $\max\left|V_N(t)\right|$, тем больше k_A и наоборот.

Сложнее обстоят дела с изучением зависимости k_A от эксцентриситета *e*. Производная $\frac{dk_A}{de}$ имеет следующий вид (когда min|φ| = 0; max|φ| = 90°):

$$\frac{dk_A}{de} = \frac{\max\left|V_N(t)\right|}{a+h}\frac{2e}{(1-e^2)^2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{(1-e^2)^3}\right). \quad (15)$$

Последний множитель в этом соотношении всегда больше нуля при любых $e \in [0; 1]$, т. е. получается следующее:

– чем больше эксцентриситет *e*, тем больше коэффициент погрешности метода k_A (когда min|φ| = 0; max|φ| = 90°) и наоборот;

– чем больше разность наибольшего и наименьшего значений модуля широты max|φ| – min|φ|, тем больше коэффициент погрешности метода и наоборот.

Выясним условия, при которых модуль фактической ошибки метода $|A|$ будет приближаться к его верхней границе при заданных величинах *a*, *h*, *e*, min|φ|, max|φ|, $\max|V_N(t)|$, *t*. Для этого проанализируем соотношения (10) и (11). Знаки ≤, ≥ в указанных соотношениях и следовательно, наибольшая погрешность соответствуют случаю, когда в продолжение времени плавания *t* выполняются условия:

а) $\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\varphi(t)\right)^3} = q_{\min}$, т. е. когда $|\varphi(t)| = \max|\varphi|\,\forall t$;

б) $\left|V_N(t)\right| = \max\left|V_N(t)\right|\forall t$.

Очевидно, что условие а) не может быть в точности выполнено, если min|φ| < max|φ|. Поэтому верхняя граница, определённая согласно выражению (14), в точности недостижима. Можно показать, что соотношение (14) для оценки погрешности *A* будет получено и в том случае, если в соотношении (8) использовать вместо величины $q_{\max}$ величину $q_{\min}$. При этом результат расчётов будет, конечно, отличаться от полученного при помощи соотношения (8). Также в условии а) необходимо произвести замену $q_{\min} := q_{\max}$. Возникает закономерный вопрос: «*Какой вариант формулы* (8) ($q_{\min}$ или $q_{\max}$) *будет более точным в текущих условиях плавания*?». Очевидно, что если судно находится ближе к минимальной (по модулю широты) параллели, то в выражении (8) следует использовать $q_{\min}$, если ближе к максимальной (по модулю широты) — $q_{\max}$. Если судно находится на средней широте, то безразлично, какой вариант формулы (8) использовать. Следует отметить, что во всех случаях оценка погрешности будет определяться соотношением (14).

Выполним расчёты по формуле (14) для судов, имеющих различную максимальную скорость хода, движущихся на поверхности общеземного эллипсоида WGS-84 (a = 6378137 м, $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$ $2 = 2(1/298{,}257223563) - (1/298{,}257223563)^2 \approx 0{,}006694379990141$) в течение различных периодов плавания. Считается, что движение происходит на поверхности эллипсоида (h = 0), а также min|φ| = 0; max|φ| = 90°. Результаты представлены в следующей таблице.

Верхняя граница модуля ошибки метода определения широты *A*
(в угловых минутах(‘) или градусах (°))

Типы судов	Наибольшая скорость $\max\lvert V_N(t)\rvert$, уз	Время плавания, ч, сут					
		один час	четыре часа	одни сутки	семь суток	14 суток	28 суток
Суда, занятые буксировкой и другими подобными работами	10	0,1′	0,4′	2,4′	16,9′	33,9′	1,1°
Сухогрузы универсальные	15	0,2′	0,6′	3,6′	25,4′	50,8′	1,7°
Контейнеровозы, паромы, пассажирские суда	25	0,3′	1,0′	6,1′	42,3′	1,4°	2,8°
Атомные крейсеры	35	0,4′	1,4′	8,5′	59,2′	2,0°	4,0°
Суда на воздушной подушке	60	0,6′	2,4′	14,5′	1,7°	3,4°	6,8°
Экранопланы	300	3,0′	12,1′	1,2°	8,5°	16,9°	33,9°

Обсуждение результатов

Расчёты показывают, что следуя на универсальном сухогрузе вдоль меридиана со скоростью 15 уз в течение четырёхчасовой вахты, можно получить погрешность в определении широты, не превосходящую по абсолютному значению 0,6′, если в формуле (8) примем $q_{\max} = 1\,(\min\lvert\varphi\rvert\ =\ 0°)$, а в выражении (14) установим min|φ| = 0; max|φ| = 90°. К значению 0,6′ модуль ошибки метода будет приближаться тем быстрее, чем скорее удастся выйти на широту φ = ± 90° от нулевого значения. Подобная оценка погрешности выполняется в том случае, когда нет возможности чётко установить широтный диапазон плавания. Например, для рассматриваемого случая сужение широтного диапазона плавания min|φ| = 60°; max|φ| = 70° приводит к верхней границе, равной уже 0,1′.

Следует отметить, что формулы (2) можно использовать не только для навигации на поверхности Земли, но также и на любом эллипсоиде вращения. В этом смысле привлекательной выглядит идея оценки погрешности по формуле (14) при определении счислимых координат на поверхности других планет, имеющих большую полуось, меньшую и / или эксцентриситет, больший, чем у Земли. Примером такой планеты в Солнечной системе является Марс [13], для которого параметры большой полуоси a и эксцентриситета e менее благоприятны с точки зрения погрешности метода счисления широты, чем для Земли.

Заключение

Основным результатом настоящего исследования является то, что получено приближённое решение дифференциального уравнения счисления геодезической широты судна, движущегося с постоянной высотой над поверхностью эллипсоида, а также выведено соотношение для гарантированной оценки точности такого решения. Оценка точности получена в виде верхней границы модуля погрешности метода приближённого решения. Приближённое решение при этом не является численным. Проанализированы зависимости указанной границы от скоростного режима судна, его геодезической высоты, разности предельных значений модуля широты, а также параметров того эллипсоида, на котором выполняется счисление широты. Выражение для границы не учитывает погрешности метода численного интегрирования северной составляющей абсолютной скорости судна.

Определены условия, когда погрешность приближённого решения достигает своего предельного значения. Выполнен расчёт верхней границы модуля погрешности метода приближённого решения для различных значений максимального модуля северной составляющей скорости при различной продолжительности плавания на поверхности эллипсоида WGS-84.

Использование предлагаемого упрощённого решения для тестирования других алгоритмов счисления возможно для случаев, когда северная составляющая скорости задаётся как функция времени, интеграл от которой берётся точно. В таком случае границы возможных значений широты определяются с точностью до вычислительной погрешности.

Ошибка в определении широты, возникающая в ходе применения приближённого решения, будет, конечно, влиять и на точность определения долготы, так как скорость изменения во времени последней зависит от радиуса параллели, на которой в данный момент находится судно, а радиус параллели зависит от широты. В связи с этим появляется необходимость получения верхней границы ошибки для долготы, возникающей в результате применения приближённого решения для широты. Если такая граница будет получена, то можно будет определить область неопределённости местоположения судна на эллипсоиде по счислению, появление которой вызвано приближённым решением уравнения счисления для широты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев Б. Н.* Анализ свойств показателей точности счисления пути и некоторые практические выводы / Б. Н. Беляев // Записки по гидрографии. — 1996. — № 230. — С. 20–28.

2. *Болховитинов В. К.* Счисляемое местоположение подводного робота / В. К. Болховитинов // Системы управления и обработки информации. — 2015. — № 30. — С. 26–37.

3. *Дерябин В. В.* Оценка точности нейросетевой системы счисления пути судна / В. В. Дерябин // Транспорт Российской Федерации. — 2015. — № 4 (59). — С. 40–43.

4. *Карасев В. В.* Обоснование требований к повышению точности измерения скорости корабля и точности счисления / В. В. Карасев, С. А. Верещагин, В. Н. Коломоец // Научные труды Дальневосточного государственного технического рыбохозяйственного университета. — 2009. — № 21. — С. 91–97.

5. *Михальский В. А.* К вопросу о решении задачи оценивания точности счисления / В. А. Михальский // Пятая Российская научно-техническая конференция «Современное состояние и проблемы навигации и океанографии (НО-2004)». — СПб.: ГНИНГИ МО РФ, 2004. — С. 77–81.

6. *Михальский В. А.* Метрология в кораблевождении и решение задач навигации / В. А. Михальский, В. А. Катенин. — СПб.: Элмор, 2009. — 288 с.

7. *Каврайский А. В.* Алгоритмы точного решения прямой и обратной навигационных задач / В. А. Каврайский // Навигация и гидрография. — 2002. — № 14. — С. 126–136.

8. *Пантелеев Н. Ф.* Счисление геодезических координат B, L, h для объектов, движущихся по поверхности Земли / Н. Ф. Пантелеев, В. В. Кузнецов, А. Г. Глазков, А. А. Власова // Труды ФГУП НПЦАП. Системы и приборы управления. — 2010. — № 1. — С. 69–72.

9. *Banachowicz A.* A comparison of numerical solutions of dead reckoning navigation/ A. Banachowicz, A. Wolski // Reports on Geodesy. — 2012. — Vol. 93. — Pp. 49–55.

10. *Wensveen P. J.* A path reconstruction method integrating dead-reckoning and position fixes applied to humpback whales / P. J. Wensveen, L. Thomas, P. J. O. Miller // Movement Ecology. — 2015. — Vol. 3. — Is. 1. — Pp. 31. DOI: 10.1186/s40462-015-0061-6.

11. *Бромберг П. В.* Теория инерциальных систем навигации / П. В. Бромберг. — М.: Наука, 1979. — 294 с.

12. *Дмитриев С. П.* Высокоточная морская навигация / С. П. Дмитриев. — СПб.: Судостроение, 1991. — 222 с.

13. *Archinal B. A.* Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009 / B. A. Archinal, M. F. A'Hearn, E. Bowell, A. Conrad, G. J. Consolmagno, R. Courtin, T. Fukushima, D. Hestroffer, J. L. Hilton, G. A. Krasinsky, G. Neumann, J. Oberst, P. K. Seidelmann, P. Stooke, D. J. Tholen, P. C. Thomas, I. P. Williams // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. —2011. — Vol. 109. — Is. 2. — Pp. 101–135. DOI: 10.1007/s10569-010-9320-4.

REFERENCES

1. Belyaev, B. N. "Analiz svoistv pokazatelei tochnosti schisleniya puti i nekotorye prakticheskie vyvody." *Zapiski po gidrografii* 230 (1996): 20-28.

2. Bolkhovitinov, V. K. "Schislyaemoe mestopolozhenie podvodnogo robota." *Control and information processing systems*." 30 (2015): 26–37.

3. Deryabin, V. V. "Ocenka tochnosti neyrosetevoy sistemy schislenia puti sudna." *Transport Rossiyskoy Federacii.* 4(59) (2015): 40–43.

4. Karasev, V. V., S. A. Vereshchagin, and V. N. Kolomoets. "Obosnovanie trebovanii k povysheniyu tochnosti izmereniya skorosti korablya i tochnosti schisleniya." *Nauchnye trudy dal'nevostochnogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo rybokhozyaistvennogo universiteta* 21 (2009): 91–97.

5. Mikhal'skii, V. A. "K voprosu o reshenii zadachi otsenivaniya tochnosti schisleniya." *Pyataya rossiiskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Sovremennoe sostoyanie i problemy navigatsii i okeanografii (NO-2004)»*. SPb.: GNINGI MO RF, 2004: 77–81.

6. Mikhal'skii, V. A., and V. A. Katenin. *Metrologiya v korablevozhdenii i reshenie zadach navigatsii*. SPb.: Elmor, 2009.

7. Kavraiskii, A. V. "Algorithms for Precise Solution of the Direct and Inverse Navigation Problems." *Navigation and hydrography* 14 (2002): 126–136.

8. Panteleev, N. F., V. V. Kuznetsov, A. G. Glazkov, and A. A. Vlasova. "Schislenie geodezicheskikh koordinat B, L, h dlya ob"ektov, dvizhushchikhsya po poverkhnosti Zemli." *Trudy FGUP NPTsAP. Sistemy i pribory upravleniya* 1 (2010): 69–72.

9. Banachowicz, Andrzej, and Adam Wolski. "A comparison of numerical solutions of dead reckoning navigation." *Reports on Geodesy* 93 (2012): 49–55.

10. Wensveen, Paul J., Len Thomas, and Patrick JO Miller. "A path reconstruction method integrating dead-reckoning and position fixes applied to humpback whales." *Movement ecology* 3.1 (2015): 31. DOI: 10.1186/s40462-015-0061-6

11. Bromberg, P. V. *Teoriya inertsial'nykh sistem navigatsii*. M.: Nauka, 1979.

12. Dmitriev, S. P. *Vysokotochnaya morskaya navigatsiya*. SPb.: Sudostroenie, 1991.

13. Archinal, Brent Allen, M. F. A'Hearn, E. Bowell, A. Conrad, G. J. Consolmagno, R. Courtin, T. Fukushima, D. Hestroffer, J. L. Hilton, G. A. Krasinsky, G. Neumann, J. Oberst, P. K. Seidelmann, P. Stooke, D. J. Tholen, P. C. Thomas, and I. P. Williams. "Report of the IAU working group on cartographic coordinates and rotational elements: 2009." *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 109.2 (2011): 101-135. DOI: 10.1007/s10569-010-9320-4.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ	INFORMATION ABOUT THE AUTHOR
Дерябин Виктор Владимирович — кандидат технических наук ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова» 198035, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7 e-mail: *gmavitder@mail.ru*, *kaf _nav@gumrf.ru*	**Deryabin, Victor V.** — PhD Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping 5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035, Russian Federation e-mail: *gmavitder@mail.ru*, *kaf _nav@gumrf.ru*

Статья поступила в редакцию 22 октября 2017 г.
Received: October 22, 2017.