

DOI: 10.21821/2309-5180-2018-10-3-647-657

AUTOMATING SEARCH OPTIMAL ROUTES AND GOODS FLOWS IN TRANSPORT NETWORKS MEANS THE INTEGER LINEAR PROGRAMMING

V. V. Saharov, I. A. Sikarev, A. A. Chertkov

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

It is shown that the integration of the transport industry in a unified system of domestic digital economy is becoming particularly urgent development of breakthrough digital technology to automate the information management processes in transport networks. Emphasizes that the automation functioning of transport systems if you have complex functional relationship should be based on new information technologies to reduce the cost and load tension traffic ensuring a minimum of transport work. It is noted that the main problem of modeling the transport networks is to develop models for adequate real logistics systems using computer methods of discrete combinatorial optimization, which should be flexible in regarding performed tasks quickly and with a small investment of time and resources to adapt to the changing directions of transport routes and conditions of operation of the logistics system. With a view to enhancing the effectiveness and quality of the logistic system proposed solution streaming tasks in such a system to produce the example transport network with complex topology in the form of a directed graph with various options the orientation of the rib by computer search optimal routes and cargo flows to achieve specified quality criteria. To obtain optimal solutions offers numerical algorithm and optimization procedure to reduce the time required to move the traffic from the source to the destination, according to the criterion of quality, by choosing the shortest routes in parts of the transport network. The effectiveness of the algorithm shows a specific example.

Keywords: logistic system, transport network, a weighted graph, the matrix, the matrix of weights, production matrix, shortest route, traffic, transport work, optimization, quality criterion.

For citation:

Saharov, Vladimir V., Igor A. Sikarev, and Alexander A. Chertkov. "Automating search optimal routes and goods flows in transport networks means the integer linear programming." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 10.3 (2018): 647–657. DOI: 10.21821/2309-5180-2018-10-3-647-657.

УДК 621.396

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ И ГРУЗОВЫХ ПОТОКОВ В ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ СРЕДСТВАМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. В. Сахаров, И. А. Сикарев, А. А. Чертков

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Показано, что в условиях интеграции транспортной отрасли в единую систему отечественной цифровой экономики особую актуальность приобретает разработка прорывных цифровых технологий для автоматизации информационно-управленческих процессов в транспортных сетях. Акцентируется внимание на том, что автоматизация процессов функционирования транспортных систем при наличии сложных функциональных связей должна базироваться на качественно новых информационных технологиях, позволяющих снизить грузонапряженность и себестоимость трафика перевозок с обеспечением минимума транспортной работы. Отмечается, что основной проблемой моделирования транспортных сетей является разработка моделей, адекватных реальным логистическим системам, с применением компьютерных методов дискретной комбинаторной оптимизации, которые должны быть гибкими в отношении выполняемых задач, быстро и с малыми затратами времени и ресурсов адаптироваться к изменяющимся

направлениям маршрутов перевозок и условиям функционирования логистической системы. С целью повышения эффективности и качества функционирования логистической системы предлагается решение потоковых задач в такой системе производить на примере транспортной сети со сложной топологией в форме ориентированного графа с различными вариантами ориентации ребер методами компьютерного поиска оптимальных маршрутов и грузовых потоков для достижения заданного критерия качества. Для получения оптимальных решений предлагаются вычислительный алгоритм и процедура оптимизации, позволяющие сократить время, необходимое на перемещение грузопотока из исходного в конечный пункт, согласно критерию качества, за счет выбора кратчайших маршрутов по звеньям транспортной сети. Эффективность применения алгоритма демонстрируется на конкретном примере.

Ключевые слова: логистическая система, транспортная сеть, взвешенный граф, матрица весов, производственная матрица, кратчайший путь, трафик, транспортная работа, оптимизация, критерий качества.

Для цитирования:

Сахаров В. В. Автоматизация поиска оптимальных маршрутов и грузовых потоков в транспортных сетях средствами целочисленного линейного программирования / В. В. Сахаров, И. А. Сикарев, А. А. Чертков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2018. — Т. 10. — № 3. — С. 647–657. DOI: 10.21821/2309-5180-2018-10-3-647-657.

Введение (Introduction)

Поиск оптимальных, в частности, кратчайших маршрутов при управлении транспортными системами, а также технических, технологических и организационных решений, способствующих оптимизации трафика перевозки грузов с обеспечением минимума транспортной работы, связан с решением класса потоковых задач различной сложности. Такие задачи в транспортных сетях решаются методами исследования операций на графах, в частности, на основе известных рекурсивных алгоритмов Беллмана–Форда, Дейкстры, подробно рассмотренных в работах [1] – [3]. Не менее эффективными являются методы дискретной комбинаторной оптимизации, рассмотренные авторами в работах [4] – [5]. В исследовании операций к классу задач планирования трафика с выбором кратчайшего пути часто относят также задачи о замене оборудования, планировании выполнения работ, размещении предприятий и объектов инфраструктуры, планировании производства и др.

Важным механизмом совершенствования трафика перевозки грузов с позиций системности является комплекс наиболее эффективных научно обоснованных решений в данной предметной области, получаемых методами моделирования и алгоритмизации с применением инструментария вычислительных сред и компьютерных технологий соответствующего назначения для адаптации управления трафиком к изменяющимся условиям функционирования транспортной системы. Например, при различных направлениях трафика грузов по транспортной сети используются различные варианты ориентирования ребер (как прямое, так и обратное). Актуальность решения задач данной проблематики подтверждается усилением требований к менеджменту качества и обоснованности принимаемых решений по организации и управлению производством с учетом динамики соответствующих секторов рынка [6] – [7].

В работе приводятся результаты исследований авторов, связанные с моделированием и алгоритмизацией трафика перевозки грузов по сети на заданном временном интервале и определением наиболее эффективных вариантов перевозок в условиях ограничений. Алгоритмом предусматривается двухэтапное решение. На первом этапе определяются наикратчайшие пути доставки грузов из пунктов отправления в пункты назначения, причем схемы доставки грузов по сети генерируются на допустимом множестве комбинаций трафика. Ограничения задаются в форме балансовых уравнений для каждого узла с учетом входных и выходных потоков. На втором этапе моделируется процесс доставки грузов с учетом имеющихся запасов в каждом пункте отправления и требуемого количества грузов в пунктах назначения. Поиск наилучшего варианта доставки осуществляется с использованием производственной матрицы маршрутизации грузов методом линейного программирования. Алгоритм реализации трафика предусматривает расчет

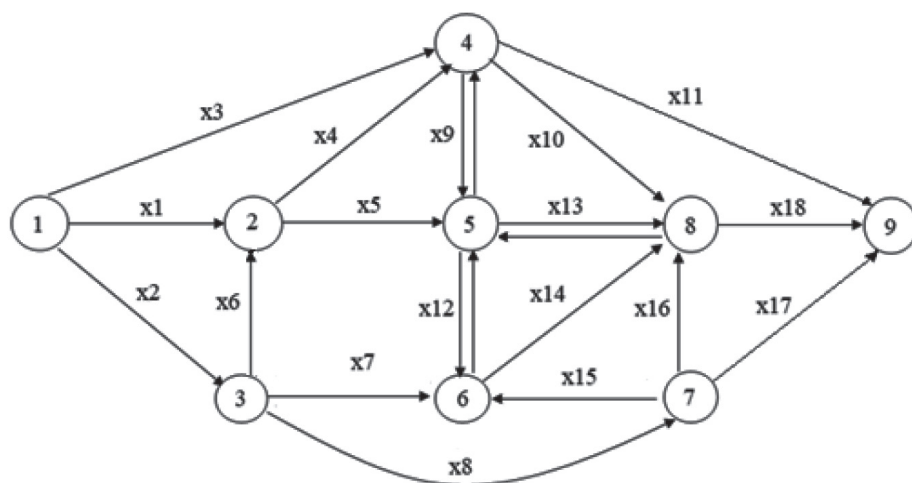
объемов следования грузов по каждой ветви транспортной сети и введение ограничений с учетом ее пропускной способности. Для транспортируемых однородных грузов модель должна предусматривать выбор маршрутов доставки, обеспечивающих минимум суммарной транспортной работы, традиционно измеряемой как произведение объема перевозок на расстояние доставки.

Поскольку многие потоковые задачи являются многокритериальными, существенно усложняется поиск оптимальных решений, основанных, как правило, на принятии некоторых компромиссных оценок, которые, вообще говоря, могут не отвечать оптимуму ни по одному из критериев. Кроме того, часто приходится принимать во внимание нелинейный характер ряда эксплуатационных показателей сети и параметров ее модели, которые оцениваются методами параметрической и структурной идентификации по эксперименту.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Вычислительный алгоритм. Пусть некоторая транспортная сеть задана в виде взвешенного графа, приведенного на рисунке, где каждой дуге (ребру) соответствует определенное расстояние. Необходимо найти кратчайший путь для перевозки грузов из i -го узла транспортной сети в заданный j -й узел [8]. При построении модели и вычислительного алгоритма в сети с заданной топологией сначала выбирают узлы (порты отправления и назначения), затем определяют целевую функцию, вводят ограничения в форме матричных уравнений: равенств и неравенств, устанавливают требуемые нижнюю и верхнюю границы вектора переменных состояния, размерность которого равна числу дуг графа.

Согласно процедуре вычислительного алгоритма, элементы вектора, соответствующие нижней границе, не должны принимать отрицательных значений. Для выполнения вычислительных операций на первом этапе в структуре алгоритма предусматривается обращение к функции линейного программирования *intlinprog* инструментария Optimization Toolbox вычислительной среды MatLAB [9] – [10]. На втором этапе для решения задачи о назначениях используется функция *linprog* [11] – [12]. Подготовка данных и ввод информации осуществляются при соблюдении синтаксиса функций. Поиск минимума транспортной работы на маршрутах, содержащих дуги (ребра) с двумя направлениями, выполняют в цикле, представляющем все возможные варианты, определяемые с использованием булевых функций, из которых выбирают наиболее подходящие решения. В отличие от существующих алгоритмов, в предлагаемом алгоритме ограничения трафика определяют численными оценками критерия качества, получаемыми на первом этапе для всех допустимых условий функционирования сети.



Расчетная схема транспортной сети

Кроме того, в отличие от известных рекурсивных алгоритмов Беллмана–Форда, Дейкстры и др., строящихся на пошаговых процедурах динамической оптимизации [1] – [2], авторам удалось

получить оптимальные решения данной задачи с помощью инструментария *intlinprog* целочисленного линейного программирования без использования пошаговых процедур в процессе вычислений. Это позволило избежать сложностей вычислительных процедур и временных затрат, возрастающих в степени 2^n , где n — количество вершин в графе.

Для построения сетевой модели и алгоритма в работе используется математический аппарат дискретного программирования, в котором искомые переменные принимают только целочисленные или логические (булевы или бинарные) значения: нуль или единицу [10]. Построим без потери общности математическую модель и алгоритм применительно к транспортной сети (см. рисунок), представленной в виде взвешенного неориентированного графа, который состоит из девяти узлов (вершин) и 18 дуг (ребер). Определим кратчайшие пути от узлов 1, 2, 3 к узлам 8, 9. Численные значения ребер (дуг) взвешенного графа приведены в столбцах табл. 1.

Таблица 1

Матрица весов ребер исходного графа

Вершины	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Исток	$x_1=1$	$x_2=4$	$x_3=6$	—	—	—	—	—
2	—	—	—	$x_4=3$	$x_5=5$	—	—	—	—
3	—	$x_6=3$	—	—	—	$x_7=5$	$x_8=7$	—	—
4	—	—	—	—	$x_9=1$	—	—	$x_{10}=4$	$x_{11}=5$
5	—	—	—	$x_9=1$	—	$x_{12}=1$	—	$x_{13}=2$	—
6	—	—	—	—	$x_{12}=1$	—	—	$x_{14}=3$	—
7	—	—	—	—	—	$x_{15}=4$	—	$x_{16}=7$	$x_{17}=6$
8	—	—	—	—	$x_{13}=2$	—	—	—	$x_{18}=2$
9	—	—	—	—	—	—	—	—	Сток

Матрицу инцидентий заполним по следующему правилу: каждый ее элемент S_{ij} , соответствующий n_i -й строке и n_j -му столбцу, равен:

$$S_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j\text{-я дуга не инцидентна вершине } n_i; \\ -1, & \text{если } x_j\text{-я дуга инцидентна вершине } n_i\text{-й вершине и исходит из нее;} \\ +1, & \text{если } x_j\text{-я дуга инцидентна вершине } n_i\text{-й вершине и входит в нее.} \end{cases}$$

Используя это правило, образуем матрицу инцидентий и представим ее в форме, удобной для выполнения дальнейших расчетов. Полученная матрица для ориентированного графа (см. рис. на с. 649) имеет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}
1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0	0	-1(1)	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	1(-1)	0	0	-1(1)	-1(1)	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1(-1)	0	-1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1(-1)	1		1	0	-1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1

Найдем кратчайшие пути от вершины 1 до всех остальных вершин. С этой целью используем аппарат математического программирования для исследования линейной модели с вектором состояния x , содержащим бинарные переменные с индексами дуг:

$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \ x_{15} \ x_{16} \ x_{17} \ x_{18}]^T$
и целевой функцией

$$J = \min_x (f \cdot x), \quad (1)$$

где f — вектор-строка с «весовыми» коэффициентами:

$$f = [1 \ 4 \ 6 \ 3 \ 5 \ 3 \ 5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 5 \ 1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 7 \ 6 \ 2].$$

Минимизацию функции (1) выполним при соблюдении линейных ограничений-равенств, представленных в матричной форме. Ограничения составим по уравнениям баланса потоков в каждом узле транспортной сети:

$$Sx = B,$$

или

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1(1) & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1(-1) & 0 & 0 & -1(1) & -1(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1(-1) & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1(-1) & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

где вектор B в модели (2) определяется из условий баланса потоков в соответствующих узлах графа.

При принятых обозначениях направлений потоков имеем:

- для узла-источника — «Выход – Вход» = -1;
- для промежуточных узлов — «Выход – Вход» = 0;
- для узла-стока — «Выход – Вход» = +1;
- все неизвестные — неотрицательные переменные.

В общем случае, при различных направлениях трафика грузов по транспортной сети, отдельные ребра графа могут иметь разные направления (как прямое, так и обратное). Такими ребрами, как следует из расчетной схемы, показанной на рисунке, являются ребра x_9 , x_{12} и x_{13} . Эти пути помечены стрелками с прямым и обратным направлениями. При составлении вычислительного алгоритма и реализации процедуры минимизации функции цели для них выбрано восемь вариантов ориентирования (табл. 2), определяемых двумя бинарными переменными.

Таблица 2

Варианты ориентирования ребер x_{34} , x_{35}

Номер варианта	Вершина 4	Вершина 5			Вершина 6	Вершина 8
	ребро x_9	ребро x_9	ребро x_{12}	ребро x_{13}	ребро x_{12}	ребро x_{13}
1	1	-1	-1	-1	1	1
2	-1	1	-1	-1	1	1
3	1	-1	1	-1	-1	1
4	-1	1	1	-1	-1	1
5	1	-1	-1	1	1	-1
6	-1	1	-1	1	1	-1
7	1	-1	1	1	-1	-1
8	-1	1	1	1	-1	-1

Среди множества решений системы (2) требуется найти такой неотрицательный результат, который доставляет минимум целевой функции (1).

Реализация в среде MatLAB. Для решения задачи дискретного (целочисленного) программирования) вида

$$J = \min_x (f \cdot x)$$

в среде MATLAB (*License Attributes: version R2017a, license number: FreeForAll*) воспользуемся функцией

$$[x, J] = \text{intlinprog}(f, \text{intcon}, A, b, Aeq, beq, lb, ub),$$

где f , intcon , b и beq являются векторами; A и Aeq — матрицы; x — целочисленный вектор состояния, компоненты которого принимают значения 0 или 1; lb , ub — нижняя и верхняя границы, задаваемые для переменных $lb \leq x \leq ub$; J — целевая функция (критерий качества). Причем intcon — вектор целых положительных чисел, указывающий целочисленные компоненты вектора состояния x .

Область поиска J путем вариации x ограничена следующими условиями [8]:

- $A \cdot x \leq b$ — линейные ограничения типа неравенств;
- $Aeq \cdot x = beq$ — линейные ограничения типа равенств.

Для обращения к функции intlinprog подготовим входную информацию:

- вектор весовых коэффициентов целевой функции f (приведен выше);
- матрицу коэффициентов системы ограничений-равенств, составленную по уравнениям баланса (матрицу инцидентий):

```
Aeq=[-1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
      1 0 0 -1 -1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
      0 1 0 0 0 -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
      0 0 1 1 0 0 0 0 a(1)*(-1) -1 -1 0 0 0 0 0 0 0;
      0 0 0 0 1 0 0 0 a(1)*1 0 0 a(2)*1 a(3)*1 0 0 0 0 0;
      0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 a(2)*(-1) 0 -1 1 0 0 0;
      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 -1 -1 -1 0;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 a(3)*(-1) 1 0 1 0 -1;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1],
```

где $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$ — элементы матрицы,

```
As=[-1-1-1;1-1-1;-1 1-1;1 1-1;-1-1 1;1-1 1;-1 1 1;1 1 1],
```

с помощью которой выбирается требуемый вариант ориентации ребер;

вектор свободных (правых) членов системы уравнений (2) — ограничений-равенств, составленных по уравнениям баланса,

```
beq=[-1 0 0 0 0 0 0 0 1]',
```

где только одно значение -1 (узел начала маршрута) и только одно значение $+1$ (узел завершения маршрута).

На первом этапе минимум критерия качества найдем с помощью функции intlinprog согласно ее синтаксису.

В отличие от известных алгоритмов, разработанный вычислительный алгоритм, реализованный в кодах MatLAB, позволяет получить наикратчайшие расстояния J_{ij} между любыми парами вершин i, j в диапазоне от J_{12} до J_{89} . Расчетные значения, полученные для выбранных направлений трафика перевозки грузов по сети (см. рис. на с. 649), приведены в табл. 3.

Таблица 3

Расчетные значения наикратчайших маршрутов трафика перевозки грузов

Начало	Конец	Наикратчайший путь	Расстояние
1	8	$S = [x1\ x4\ x9\ x13] = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$	$J_{18} = 7$
1	9	$S = [x1\ x4\ x11] = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$	$J_{19} = 9$
2	8	$S = [x4\ x9\ x13] = [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$	$J_{28} = 6$
2	9	$S = [x4\ x11] = [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$	$J_{29} = 8$
3	8	$S = [x7\ x12\ x13] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$	$J_{38} = 8$
3	9	$S = [x7\ x12\ x13\ x18] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$	$J_{39} = 10$

На втором этапе с помощью алгоритма решается задача распределения грузов, содержащихся в пунктах отправления (узлы 1, 2, 3), по потребителям (пунктам назначения), расположенным в узлах 8 и 9. Решения основываются на данных, приведенных в табл. 3. Рассматривается процесс полной доставки грузов в пункты назначения при отсутствии накопителей на пути их следования. Расчеты выполняются на основе производственной матрицы второго этапа, представленной в табл. 4. В ней приведены узлы отправления грузов, расположенные в левом столбце, и узлы приема (назначения) грузов, указанные в верхней строке. Видно, что весовыми коэффициентами производственной матрицы являются данные, представляющие собой минимальные расстояния между соответствующими узлами отправления и приема грузов, содержащиеся в четвертой графе табл. 3. Объемы поставок указаны в четвертой графе табл. 4, а объемы потребления — в нижней строке данной таблицы. Эти данные соответствуют условиям задачи трафика по сети с топологией, приведенной на рисунке (см. с. 169).

Таблица 4

Производственная матрица плана перевозок грузов по сети

Узлы отправления грузов	Узлы приема грузов		Объемы поставок, т
	8	9	
1	7	9	40
2	6	8	35
3	8	10	25
Объемы потребления	30	70	

Определение плана перевозок по оптимальным маршрутам транспортной сети выполним с помощью линейного программирования. Цель планирования состоит в минимизации транспортной работы по алгоритму трафика. Введем вектор состояния y , элементами которого являются объемы перевозок между узлами отправления и приема грузов (см. табл. 4) с аналогичной индексацией:

$$y = [y_{18}\ y_{19}\ y_{28}\ y_{29}\ y_{38}\ y_{39}]^T.$$

Подготовим данные для использования функции *linprog* инструментария Optimization Toolbox. Согласно синтаксису функции, на основании производственной матрицы (см. табл. 4) получим

$$f1 = [7\ 9\ 6\ 8\ 8\ 10].$$

При отсутствии ограничений-неравенств численные значения $A1$, $b1$ приравняем «пустым» матрицам. Ограничения-равенства представим выражениями:

$$A1eq = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b1eg = [40 \ 35 \ 25 \ 30 \ 70]^T.$$

Введем ограничения на переменные состояния: нижняя граница $lb1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ и верхняя граница $ub1 = []$. Тогда вычисления с использованием функции *linprog* приводят к следующему результату:

$$y_{opt} = [0 \ 40 \ 30 \ 5 \ 0 \ 25]^T.$$

Объем минимальной транспортной работы (при условии, что расстояния измеряются в километрах, а перевозимые грузы в тоннах) составляет

$$J1 = 830 \text{ т-км.}$$

Загрузку звеньев сети, соответствующую расчетному режиму по алгоритму, представим вектором

$$x_{opt} = [x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \ x_{24} \ x_{25} \ x_{32} \ x_{36} \ x_{37} \ x_{45} \ x_{48} \ x_{49} \ x_{56} \ x_{58} \ x_{68} \ x_{76} \ x_{78} \ x_{79} \ x_{89}]^T = \\ = [40 \ 0 \ 0 \ 75 \ 0 \ 0 \ 25 \ 0 \ 30 \ 0 \ 45 \ 25 \ 55 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25]^T.$$

Результаты (Results)

На основе разработанного алгоритма получены решения, сведенные в табл. 5.

Таблица 5

План перевозок по оптимальным маршрутам транспортной сети

Узлы отправления грузов	Узлы приема грузов		Объемы поставок
	n_6	n_7	
n_1	$y_{16}=0$	$y_{17}=40$	40
n_3	$y_{36}=30$	$y_{37}=5$	35
n_4	$y_{46}=0$	$y_{47}=25$	25
Объемы потребления	30	70	

Обсуждение (Discussion)

Таким образом, предложен алгоритм трафика перевозки грузов в сетях с ограниченными ресурсами, базирующийся на экстремальных решениях, получаемых методами исследования операций с использованием компьютерных вычислительных средств и способов количественной оценки принимаемых решений. Предложенная модель поиска кратчайших маршрутов и расчета оптимального трафика перевозки грузов по минимуму транспортной работы задана уравнениями функции цели и ограничениями в форме балансовых уравнений с учетом входных и выходных потоков для каждого узла сети при соответствующих граничных условиях. Введены бинарные переменные состояния, что позволило фиксировать принадлежность каждой заданной операции (дуги) соответствующему кратчайшему пути и использовать для расчетов функции линейного программирования, содержащиеся в инструментарии Optimization Toolbox среды MatLAB.

Выводы (Summary)

1. Корректность и эффективность предложенных алгоритмических решений подтверждены на примере автоматизации поиска кратчайших маршрутов и расчетов оптимального трафика

перевозки грузов с полным анализом возможных вариантов, а также проведением машинного эксперимента.

2. Приведенный алгоритм может быть использован не только для автоматизации и оптимизации логистических систем на водном транспорте, но и в телекоммуникационных системах пакетной передачи данных [14], в системах оптимизации маршрутных карт [13], а также в системах автоматизации и управления технологическими процессами высокой размерности различного назначения [15] – [16].

3. Реализация управления трафиком по алгоритму, обеспечивающему минимум транспортной работы, предусматривает уменьшение потребления топлива на перевозки, что также определяет практическую ценность предлагаемых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чертков А. А.* Автоматизация выбора кратчайших маршрутов судов на основе модифицированного алгоритма Беллмана-Форда / А. А. Чертков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2017. — Т. 9. — № 5. — С. 1113–1122. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-5-1113-1122.
2. *Чертков А. А.* Рекурсивный метод оптимизации логистических путей средствами MATLAB / А. А. Чертков, А. А. Вардомская, А. А. Дмитриев // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2015. — № 6 (34) — С. 196–204. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-6-196-204.
3. *Сахаров В. В.* Алгоритм оптимального планирования группового взаимодействия роботов / В. В. Сахаров, А. А. Чертков, Д. С. Тормашев // Морской Вестник. — 2014. — № 4. — С. 119–122.
4. *Сахаров В. В.* Алгоритм трафика перевозки грузов с обеспечением минимума транспортной работы / В. В. Сахаров, А. А. Чертков, А. А. Дмитриев // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2016. — № 1 (35). — С. 180–188. DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-1-180-188.
5. *Чертков А. А.* Автоматизация определения критического пути в логистической системе / А. А. Чертков, А. А. Вардомская, А. А. Дмитриев // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2015. — № 5(33). — С. 194–200. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-5-194-200.
6. *Гузаиров М. Б.* Моделирование транспортной сети поставок в строительной индустрии / М. Б. Гузаиров, В. А. Тарасова // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. — 2008. — Т. 10. — № 2. — С. 58–63.
7. *D' Ambrosio C.* Mathematical programming techniques in water network optimization / C. D' Ambrosio, A. Lodi, S. Wiese, C. Bragalli // European Journal of Operational Research. — 2015. — Vol. 243. — Is. 3. — Pp. 774–788. DOI: 10.1016/j.ejor.2014.12.039.
8. *Бояринцева Т. И.* Теория графов: методические указания к выполнению домашнего задания по курсу «Дискретная математика» / Т. И. Бояринцева, А. А. Мاستихина. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. — 40 с.
9. *Рассел Д.* Диаграмма состояний (теория автоматов) / Д. Рассел. — Изд-во VSD, 2012. — 96 с.
10. *Харари Ф.* Теория графов / Ф. Харари; пер. с англ. и предисл. В. П. Козырева; под ред. Г. П. Гаврилова. — Изд. 2-е. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 296 с.
11. *Заринова Э. Р.* Дискретная математика. Ч. III: Теория графов / Э. Р. Заринова, М. Г. Кокотчикова. — М.: Изд-во РУДН, 2013. — 179 с.
12. *Reich D.* A linear programming approach for linear programs with probabilistic constraints / D. Reich // European Journal of Operational Research. — 2013. — Vol. 230. — Is. 3. — Pp. 487–494. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.04.049.
13. *Bozhenyuk A.* The method of the maximum flow determination in the transportation network in fuzzy conditions / A. Bozhenyuk, I. Rozenberg, E. Rogushina // Proceedings of the Congress on Intelligent Systems and Information Technologies «IS&IT'11». — М.: Physmathlit, 2011. — Vol. 4. — Pp. 17–24.
14. *Dutta D.* Multi-choice goal programming approach for a fuzzy transportation problem / D. Dutta, S. Murthy // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. — 2010. — Vol. 2. — Pp. 132–139.
15. *Kumar A.* Generalized Simplex Algorithm to Solve Fuzzy Linear Programming Problems with Ranking of Generalized Fuzzy Numbers / A. Kumar, P. Singh, J. Kaur // Turkish Journal of Fuzzy Systems. — 2010. — Vol. 1. — No. 2. — Pp. 80–103.

16. Kumar A. Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Programming Problems with Inequality Constraints / A. Kumar, J. Kaur, P. Singh // International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences. — 2010. — Vol. 6. — Pp. 37–41.

REFERENCES

1. Chertkov, Alexander A. "Automation selection shortcuts routes of ships on the basis of modified Bellman-Ford Algorithm." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 9.5 (2017): 1113–1122. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-5-1113-1122.
2. Chertkov, Alexandr Alexandrovich, Anna Alexandrovna Vardomsкая, and Alexandr Alexandrovich Dmitriev. "A recursive method of optimization of the logistic ways by means of MATLAB". *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 6(34) (2015): 196–204. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-6-196-204.
3. Saharov, V.V., A.A. Chertkov, and D.S. Tormašev. "Optimal planning group communication Algorithm of robots." *Morskoy Vestnik* 4 (2014): 119–122.
4. Saharov, Vladimir Vasilevich, Alexandr Alexandrovich Chertkov, and Alexandr Alexandrovich Dmitriev. "Ensuring minimum transport work algorithm for goods traffic". *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 1(35) (2016): 180–188. DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-1-180-188.
5. Chertkov, Alexandr Alexandrovich, Anna Alexandrovna Vardomsкая, and Alexandr Alexandrovich Dmitriev. "Automation to define critical way in logistical system". *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 5(33) (2015): 194–200. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-5-194-200.
6. Guzaurov, M.B., and V.A. Tarasova. "Modelirovanie transportnoi seti postavok v stroitel'noi industrii." *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta* 10.2 (2008): 58–63.
7. D'Ambrosio, Claudia, A. Lodi, S. Wiese, and C. Bragalli. "Mathematical programming techniques in water network optimization." *European Journal of Operational Research* 243.3 (2015): 774–788. DOI: 10.1016/j.ejor.2014.12.039.
8. Boyarintseva, T.I., and A.A. Mastikhina. *Teoriya grafov: metodicheskie ukazaniya k vypolneniyu domashnego zadaniya po kursu «Diskretnaya matematika»*. M.: MGTU im. N.E. Bauman, 2014.
9. Rassel, D. *Diagramma sostoyanii (teoriya avtomatov)*. Izd-vo: VSD, 2012.
10. Kharari, F. *Teoriya grafov*. Edited by G. P. Gavrilov. 2nd ed. M.: Editorial URSS, 2003.
11. Zaripova, E.R., and M.G. Kokotchikova. *Diskretnaya matematika. Chast' III. Teoriya grafov*. M.: Izd-vo RUDN, 2013.
12. Reich, Daniel. "A linear programming approach for linear programs with probabilistic constraints." *European Journal of Operational Research* 230.3 (2013): 487–494. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.04.049.
13. Bozhenyuk, A., I. Rozenberg, and E. Rogushina. "The method of the maximum flow determination in the transportation network in fuzzy conditions." *Proceedings of the Congress on Intelligent Systems and Information Technologies «IS&IT'11»*. Vol. 4. M.: Physmathlit, 2011. 17–24.
14. Dutta, Debashis, and Satyanarayana Murthy. "Multi-choice goal programming approach for a fuzzy transportation problem." *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences* 2 (2010): 132–139.
15. Kumar, Amit, Pushpinder Singh, and Jagdeep Kaur. "Generalized simplex algorithm to solve fuzzy linear programming problems with ranking of generalized fuzzy numbers." *Turkish Journal of Fuzzy Systems* 1.2 (2010): 80–103.
16. Kumar, Amit, Jagdeep Kaur, and Pushpinder Singh. "Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear programming problems with inequality constraints." *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences* 6 (2010): 37–41.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сахаров Владимир Васильевич —
доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация,
Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
e-mail: _saharov_@rambler.ru,
SaharovVV@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Saharov, Vladimir V. —
Dr. of Technical Sciences, professor
Admiral Makarov State University
of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: _saharov_@rambler.ru,
SaharovVV@gumrf.ru

Сикарев Игорь Александрович —
доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация,
Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
e-mail: sikarev@yandex.ru,
kaf_electricautomatic@gumrf.ru

Чертков Александр Александрович —
доктор технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация,
Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
e-mail: chertkov51@mail.ru,
kaf_electricautomatic@gumrf.ru

Sikarev, Igor A. —
Dr. of Technical Sciences, professor
Admiral Makarov State University
of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: sikarev@yandex.ru,
kaf_electricautomatic@gumrf.ru

Chertkov, Alexandr A. —
Dr. of Technical Sciences, associate professor
Admiral Makarov State University
of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: chertkov51@mail.ru,
kaf_electricautomatic@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 16 мая 2018 г.

Received: May 16, 2018.