

THE FILTERING PROPERTIES OF ELECTRICAL MACHINES AT WIDTH-PULSE MODULATION

F. A. Gелver^{1,2}, I. V. Belousov^{2,1}

¹ — Krylov State Research Center, St. Petersburg, Russian Federation

² — Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The filtering properties evaluation of various types of electrical machines with the pulse-width modulation is considered in the paper. An indicator allowing the evaluation of the filtering properties of RL - load is introduced in the paper. The introduced indicator with certain assumptions allows us to assess the filtering properties of electric machines for determination the main quality indicator - the dispersion of currents flowing in the windings of the electric machines. The characteristic of electromagnetic processes, generated by PWM, in an electric motor is given. Three types of the most common AC machines: asynchronous, synchronous, and reactive electric machines - are compared on the proposed indicator. A mathematical description of these types of AC electric machines in a natural coordinate system is presented. Using the Lyapunov transformation, the equations written in the natural coordinate system are transformed into the equations written in the d and q axes. The characteristic polynomial is presented and the roots of the characteristic equation are found. The roots of the characteristic equation allow us to determine the analytical dependence for determining the index of filtering properties of the considered electric machine. For the convenience of writing and comparing the results of various electric drives, characterized by significant differences in power, the basic and relative values of the electric machines parameters are introduced. For the considered types of electric machines, the relative values of their parameters are presented for a wide range of powers represented in relative units. The numerical values of indicators of filtering properties of the considered types of electrical machines are determined, their comparison is made and the conclusions are made. The obtained results have a great practical importance at the synthesis of algorithms to control the powerful electric drives at the limitations imposed on the switching frequency of the power semiconductor elements of the electric converter.

Keywords: pulse width modulation (PWM), current dispersion, filtering properties, Lyapunov transformations, basic and relative values, asynchronous electric motor, synchronous electric motor, reactive electric motor, anisotropic magnetic conductivity, longitudinal rotor blend, transverse rotor blend.

For citation:

Gелver, Fedor A., and Igor V. Belousov. "The filtering properties of electrical machines at width-pulse modulation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.1 (2019): 182–192. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-1-182-192.

УДК: 621.313.3

ФИЛЬТРУЮЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН ПРИ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Ф. А. Гельвер^{1,2}, И. В. Белоусов^{2,1}

¹ — ФГУП «Крыловский государственный научный центр»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

² — ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Статья посвящена вопросам оценки фильтрующих свойств различных типов электрических машин при широтно-импульсной модуляции. Введен показатель, который позволяет осуществлять оценку фильтрующих свойств RL-нагрузки. Введенный показатель при определенных допущениях позволяет производить оценку фильтрующих свойств электрических машин для определения основного показателя качества — дисперсии токов, протекающих в обмотках электрических машин. Приведена характеристика электромагнитных процессов в электрическом двигателе, порождаемых широтно-импульсной модуляци-

ей. Для сравнения по предложенному показателю произведено сравнение трех наиболее распространенных машин переменного тока: асинхронной, синхронной и реактивной электрических машин. Представлено математическое описание данных типов электрических машин переменного тока в естественной системе координат. С использованием преобразования Ляпунова уравнения, записанные в естественной системе координат, преобразованы в уравнения, записанные в осях d и q . Представлен характеристический полином и найдены корни характеристического уравнения. Корни характеристического уравнения позволили определить аналитическую зависимость для определения показателя фильтрующих свойств рассматриваемой электрической машины. Для удобства записи и сопоставления полученных результатов различных электроприводов, характеризующихся значительными отличиями в мощности, введены базовые и относительные величины параметров электрических машин. Для рассмотренных типов электрических машин приведены относительные значения их параметров для широкого диапазона мощностей, представленных в относительных единицах. Определены численные значения показателей фильтрующих свойств рассмотренных типов электрических машин, выполнено их сравнение и сделаны выводы. Полученные результаты имеют большое практическое значение при синтезе алгоритмов управления мощными электроприводами при ограничениях, наложенных на частоту коммутации силовых полупроводниковых элементов электрического преобразователя.

Ключевые слова: широтно-импульсная модуляция, дисперсия тока, фильтрующие свойства, преобразования Ляпунова, базовые и относительные величины, асинхронный электродвигатель, синхронный электродвигатель, реактивный электродвигатель, анизотропная магнитная проводимость, продольная шихтовка ротора, поперечная шихтовка ротора.

Для цитирования:

Гельвер Ф. А. Фильтрующие свойства электрических машин при широтно-импульсной модуляции / Ф. А. Гельвер, И. В. Белоусов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 1. — С. 182–192. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-1-182-192.

Введение (Introduction)

В современных транспортных средствах, особенно автономных, все большее применение находят системы электродвижения с использованием регулируемого электропривода. Бурное развитие таких систем связано с лучшими эксплуатационными характеристиками, более высокой экономичностью и энергетической эффективностью, а также практически отсутствием вредных выбросов в окружающую среду. В состав электроприводов транспортных средств входят электрический, электромеханический и механические преобразователи. Современные электрические преобразователи реализуют на элементах силовой электроники, которые работают в ключевом режиме работы с использованием широтно-импульсной модуляции (ШИМ). На выходе таких электрических преобразователей должен быть установлен фильтр низкой частоты для обеспечения высокого качества токов, протекающих по нагрузке. Качество токов характеризуется дисперсией тока. Индуктивные электрические машины сами являются фильтром низкой частоты. Поэтому необходима оценка фильтрующих свойств электрических машин для определения дисперсии токов, протекающих в них.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Базовые и относительные величины электрических машин. Для оценки фильтрующих свойств электрических машин необходимо осуществить их математическое описание в виде дифференциальных уравнений. При исследовании электрических машин удобно применять относительные единицы различных физических величин. Данное удобство обусловлено тем, что результаты исследования различных электроприводов, характеризующихся значительными отличиями в мощности, становятся универсальными и сопоставимыми. Кроме того, введение относительных величин ведет к сокращению числа параметров, фигурирующих в исследовании, и делает полученные результаты более обозримыми и удобными для использования [1]. Для введения относительных единиц переменных, используемых в математической модели, требуется выделить набор базовых величин. Базовые величины разделим на *основные* и *производные*.

В качестве основных базовых величин примем минимальный набор констант, имеющих различные единицы измерений, который позволяет выразить производные базовые величины через основные базовые величины. При выборе основных базовых величин целесообразно исходить из номинальных данных электрической машины: номинального фазного напряжения статора электродвигателя U_n , номинального тока статора I_n , номинальной угловой частоты напряжения статора ω_n . В качестве основных базовых величин целесообразно использовать следующие:

$$U_6 = \sqrt{2}U_n; I_6 = \sqrt{2}I_n; \omega_6 = \omega_n.$$

Производные базовые величины синтезируются из основных базовых величин: сопротивление: $R_6 = U_6/I_6 = U_n/I_n$; индуктивности: $L_6 = U_6/I_6/\omega_6$; электромагнитного момента: $M_6 = p(m/2)U_6I_6/\omega_6$; мощности: $P_6 = (m/2)U_6I_6$, где m — число фаз; p — число пар полюсов.

Переменная, выраженная в относительных единицах, равна отношению переменной к соответствующему базовому значению. Переменные, выраженные в относительных единицах, будем помечать верхним индексом $*$.

Характеристика электромагнитных процессов в электрическом двигателе, порождаемых ШИМ. Электромагнитные процессы в электродвигателях переменного тока описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. При исследовании таких уравнений, как правило, используется теория Ляпунова – Флоке. Основной результат этой теории, сформулированный А. М. Ляпуновым, сводится к доказательству теоремы о возможности преобразования дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Возмущающие воздействия таких уравнений будут импульсными периодическими функциями, частота которых совпадает с частотой модуляции. Возмущающие воздействия уравнений также будут функциями модулирующих функций, частота которых существенно ниже частоты модуляции. Поэтому при анализе электромагнитных процессов, обусловленных ШИМ преобразователя, можно считать, что возмущающие воздействия преобразованных уравнений будут импульсными периодическими функциями, частота которых определяется только частотой модуляции. Таким образом, в силу относительной малости интервала ШИМ, возмущающие воздействия на интервале модуляции можно считать постоянными величинами.

Исследования [1] показывают, что динамические процессы в электродвигателях переменного тока носят колебательный характер. Решения дифференциальных уравнений напряжений электродвигателя, подвергнутых преобразованию Ляпунова, относительно токов в обмотках на интервале ШИМ могут быть представлены выражением

$$i_x = B_0 + \sum_{k=1}^n \exp(\delta_k t)(B_k \cos(\omega_k t) + C_k \sin(\omega_k t)), \quad (1)$$

где δ_k и ω_k — соответственно действительная и мнимая части корня k -го характеристического уравнения; B_0 , B_k и C_k — постоянные интегрирования.

Покажем, что динамический процесс развития тока (1) в электрической машине на периоде ШИМ можно аппроксимировать LR -фильтром, постоянная времени которого $T = L/R$ много больше периода модуляции. Так как период модуляции мал, динамику тока (1) можно представить двумя слагаемыми ряда Маклорена:

$$i_x = A_0 + C_0 t, \quad (2)$$

где $A_0 = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k$; $C_0 = \sum_{k=1}^n (B_k \delta_k + C_k \omega_k)$.

Очевидно, что ток в цепи LR на интервале модуляции также можно представить выражением (2). Таким образом, фильтрующие свойства электрической машины на интервале ШИМ могут быть представлены LR -цепью. Рассмотрим некоторые особенности представления параметров LR -цепи, которая используется для аппроксимации фильтрующих свойств электрических машин.

Постоянные времени LR -цепи представим в относительном виде: $T^* = \omega_\delta \cdot T = \omega_\delta \cdot L/R$. Относительная постоянная времени нагрузки T^* далее рассматривается как характеристика фильтрующих свойств электрической машины, не связанная с управлением ШИМ. Если период модуляции ШИМ T_0 фиксирован исходя из ограничения на потери мощности в электронных ключах, то отношение

$$\varepsilon = \frac{T_0}{T} = \frac{\omega_\delta T_0}{T^*}$$

является характеристикой фильтрующих свойств электрической машины.

Для оценки фильтрующих свойств динамических систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями, необходимо исследовать связи их параметрического пространства с переменными состояния. Выполнить такое исследование в общем случае представляется достаточно проблематичным. Однако для динамических систем, поведение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями, такая связь определяется характеристическим уравнением. Известно, что отрицательные действительные части корней являются характеристиками скорости затухания динамических процессов. Обратные значения действительных частей корней являются постоянными времени. Следовательно, минимальный корень характеристического уравнения $p_{\max}$ может использоваться для оценки показателя фильтрующих свойств нагрузки при заданной частоте модуляции:

$$\varepsilon = -T_0 p_{\max} = -T_0 \omega_\delta p_{\max}^* = -\frac{2\pi p_{\max}^*}{f^*}, \quad (3)$$

где $p_{\max}^* = p_{\max} / \omega_\delta$ — минимальное относительное значение действительной части корней характеристического уравнения; $f^* = 2\pi / \omega_\delta T_0$ — относительная частота модуляции.

Следует отметить, что наименьшему значению ε соответствуют лучшие фильтрующие свойства электрической машины. При сопоставлении полученных при сравнении различных типов электрических машин данных может быть использован параметр $\varepsilon_0 = \varepsilon \cdot f$, который характеризует фильтрующие свойства электрической машины без привязки к частоте модуляции силовых ключей электрического преобразователя.

Проведем исследование фильтрующих свойств различных типов электрических машин, наиболее часто используемых в регулируемом электроприводе транспортных средств, и выполним их сравнение по показателю фильтрующих свойств ε . К наиболее распространенным типам электрических машин относятся: асинхронная, синхронная и бурно развивающийся класс синхронных электрических машин — реактивная электрическая машина. Более подробно конструкция, принцип действия реактивных электрических машин с зубчатым статором и ротором представлены в источниках [2]–[4], а в монографии [5] приведена теория проектирования и управления такой электрической машиной. Продолжением развития конструкции реактивных электрических машин явилась реактивная машина с анизотропной магнитной проводимостью ротора [6]–[8], принцип действия, теория проектирования и управления которой более полно представлены в источниках [9]–[11].

Фильтрующие свойства асинхронного электродвигателя при ШИМ. Асинхронные электродвигатели являются наиболее распространенным типом электрических машин, используемых в регулируемом электроприводе транспортных средств [12], [13]. Для решения поставленной задачи рассмотрим поведение корней характеристического уравнения асинхронного электродвигателя в функции скорости вращения ротора.

Уравнения, связывающие напряжения на обмотках статора и ротора асинхронной машины и токи, в естественной системе координат имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} U_s &= R_1 I_s + L_1 p I_s + p \{L_{ss} I_s + L_{sr}(\gamma) I_r\}; \\ 0 &= R_2 I_r + L_2 p I_r + p \{L_{rr} I_r + L_{rs}(\gamma) I_s\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где R_1 — сопротивление обмотки статора; R_2 — приведенное сопротивление обмотки ротора; L_1 — индуктивность рассеяния обмотки статора; L_2 — приведенная индуктивность рассеяния обмотки

ротора; $\mathbf{U}_s$ — вектор фазных напряжений статора; $\mathbf{I}_s$ — вектор токов статора; $\mathbf{I}_r$ — вектор приведенных токов ротора; $\mathbf{L}_{ss} = (2/m)L_0\mathbf{D}_s^T(0)\mathbf{D}_s(0)$ — матрица индуктивностей обмоток статора; $\mathbf{L}_{rr} = (2/m)L_0\mathbf{D}_r^T(0)\mathbf{D}_r(0)$ — матрица индуктивностей обмоток ротора; $\mathbf{L}_{sr}(\gamma) = \mathbf{L}_{rs}^T(\gamma) = (2/m)L_0\mathbf{D}_s^T(\gamma)\mathbf{D}_r(0)$ — матрица взаимных индуктивностей обмоток статора и ротора; L_0 — главная индуктивность обмотки; $\mathbf{D}_s(\gamma) = \mathbf{D}_r(\gamma)$ — фазные матрицы статора и ротора, γ — электрический угол поворота ротора.

Фазная матрица статора $\mathbf{D}_s(\gamma)$ представляет собой проекции магнитных осей фазных обмоток статора на оси координат d, q на плоскости поперечного разреза ротора машины:

$$\mathbf{D}_s(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \cos(\rho + \gamma) & \cdots & \cos((m-1)\rho + \gamma); \\ \sin(\gamma) & \sin(\rho + \gamma) & \cdots & \sin((m-1)\rho + \gamma), \end{bmatrix} \quad (5)$$

при условии, что ось координат d совпадает с направлением наибольшей магнитной проводимостью ротора, а ось координат q — с направлением наименьшей магнитной проводимостью ротора.

Фазная матрица является матрицей Ляпунова. Приняв следующие условия:

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} u_{1U} \\ u_{1V} \end{bmatrix} = (2/m)\mathbf{D}_s(\gamma_1 t)\mathbf{U}_s; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} i_{1U} \\ i_{1V} \end{bmatrix} = (2/m)\mathbf{D}_s(\gamma_1 t)\mathbf{I}_s; \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} i_{2U} \\ i_{2V} \end{bmatrix} = (2/m)\mathbf{D}_s(\gamma t)\mathbf{I}_r,$$

после преобразований уравнений (4) получим систему уравнений асинхронной машины с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{U}_1 = R_1\mathbf{I}_1 + \omega_1 L_{01}\mathbf{E}\mathbf{I}_1 + L_{01}p\mathbf{I}_1 + \omega_1 L_0\mathbf{E}\mathbf{I}_2 + L_0p\mathbf{I}_2;$$

$$\mathbf{0} = R_2\mathbf{I}_2 + \omega_2 L_{02}\mathbf{E}\mathbf{I}_2 + L_{02}p\mathbf{I}_2 + \omega_2 L_0\mathbf{E}\mathbf{I}_1 + L_0p\mathbf{I}_1, \quad (6)$$

где $L_{01} = L_0 + L_1$; $L_{02} = L_0 + L_2$;

ω_1 — угловая частота токов статора;

ω_2 — угловая частота токов ротора.

Уравнения, записанные для двухмерных векторов в осях координат u, v , можно переписать в комплексной форме записи путем формальной замены $\mathbf{E}$ на мнимую единицу j , а векторы $\mathbf{U}_1, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ — на комплексные переменные:

$$\underline{u}_1 = u_{1U} + j \cdot u_{1V}; \quad \underline{i}_1 = i_{1U} + j \cdot i_{1V}; \quad \underline{i}_2 = i_{2U} + j \cdot i_{2V}.$$

Тогда уравнения в комплексной форме записи примут следующий вид:

$$\underline{u}_1 = R_1 \underline{i}_1 + j\omega_1 \cdot L_{01} \underline{i}_1 + L_{01} p \underline{i}_1 + j\omega_1 L_0 \underline{i}_2 + L_0 p \underline{i}_2;$$

$$\underline{u}_2 = R_2 \underline{i}_2 + j\omega_2 L_{02} \underline{i}_2 + L_{02} p \underline{i}_2 + j\omega_2 L_0 \underline{i}_1 + L_0 p \underline{i}_1. \quad (7)$$

Уравнениям (7) соответствует характеристический полином

$$\underline{Y}(p) = a_2 p^2 + \underline{a}_1 p + \underline{a}_0,$$

$$\text{где } a_2 = \frac{L_{01}L_{02} - L_0^2}{R_1 R_2}; \quad \underline{a}_1 = \frac{L_{01}}{R_1} + \frac{L_{02}}{R_2} + j a_2 (\omega_1 + \omega_2); \quad \underline{a}_0 = 1 - \omega_1 \omega_2 a_2 + j \left(\omega_1 \frac{L_{01}}{R_1} + \omega_2 \frac{L_{02}}{R_2} \right).$$

Так как характеристический полином имеет второй порядок, найти корни характеристического уравнения $\underline{Y}(p) = 0$ несложно:

$$p_{1,2} = 1/2 \left(-\underline{a}_1 / a_2 \pm \sqrt{(\underline{a}_1 / a_2)^2 - 4 \underline{a}_0 / a_2} \right),$$

исходя из условия, что основная индуктивность достаточно велика и не оказывает существенного влияния на динамику переходных процессов, а следовательно, и на значения корней характеристического уравнения. Кроме того, будем полагать, что активные сопротивления обмоток статора

и ротора асинхронного электродвигателя одинаковы: $R_1 = R_2$. Основываясь на данных допущениях, упростим выражение для корней характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \left[\frac{-a_1 / a_2 \pm \sqrt{(a_1 / a_2)^2 - 4 \cdot a_0 / a_2}}{2} \right] =$$

$$= -\omega_6 \cdot \left(s_k + j \cdot (\omega_2^* + \omega^* / 2) \pm \sqrt{s_k^2 - (\omega^* / 2)^2} \right),$$

где $s_k = R_2^* / (L_1^* + L_2^*) / \omega_6$ — критическое скольжение;

$\omega_2^* = \omega_2 / \omega_6$ — относительная величина угловой частоты токов ротора;

$\omega^* = \omega / \omega_6$ — относительная величина угловой электрической скорости вращения ротора.

Ошибка, обусловленная допущением $L_0 \rightarrow \infty$ для действительных частей корней, существенна лишь в окрестности $\omega^* = 0$. Подкоренное выражение в формуле для корней характеристического уравнения может быть как положительным, так и отрицательным. Подкоренное выражение отрицательно, если $\omega^* \notin [-2s_k; 2s_k]$. В этом случае действительные части относительных значений корней одинаковы и определяются выражением

$$\operatorname{Re}(p_{1,2}^*) = -s_k,$$

где $p_{1,2}^* = p_{1,2} / \omega_6$.

При выполнении условия $\omega^* \in [-2s_k; 2s_k]$ действительные части относительных значений корней различны и определяются выражением

$$\operatorname{Re}(p_{1,2}^*) = -s_k \pm \sqrt{s_k^2 - (\omega^* / 2)^2}.$$

Графики зависимостей действительной и мнимой частей корней от угловой скорости вращения ротора ω^* приведены на рис. 1.

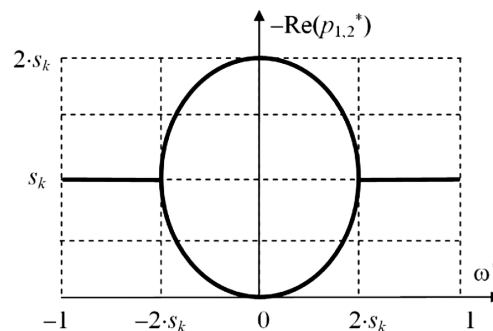


Рис. 1. Зависимости действительной частей корней характеристического уравнения от угловой скорости вращения ротора асинхронного электродвигателя

Параметр, оценивающий фильтрующие свойства асинхронной электрической машины,

$$\varepsilon_0 = 2\pi s_k. \quad (8)$$

Относительные значения параметров различных типов асинхронных машин принимают следующие значения: $R_1^* = R_2^* = 0,02-0,06$; $L_1^* = L_2^* = 0,07-0,14$; $L_0^* = 2-3$. Большие значения $R_1^* = R_2^*$ и $L_1^* = L_2^*$ относятся к машинам меньшей мощности. Значение параметра $\varepsilon_0 = 0,63-2,5$ характеризует фильтрующие свойства асинхронного электродвигателя.

Фильтрующие свойства синхронного электродвигателя при ШИМ. Дифференциальные уравнения синхронной машины имеют пятый порядок. Поэтому ее динамическое поведение является наиболее сложным. Уравнения, характеризующие динамику электромагнитных процессов в синхронной машине, записываются на основании второго закона Кирхгофа для обмоток статора S , демпферной обмотки ротора R и обмотки возбуждения F [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_S &= R_1 \mathbf{I}_S + L_1 p \mathbf{I}_S + p \{ \mathbf{L}_{SS}(\gamma) \mathbf{I}_S + \mathbf{L}_{SR}(\gamma) \mathbf{I}_R + \mathbf{L}_{SF}(\gamma) i_F \}; \\ \mathbf{0} &= \mathbf{R}_R \mathbf{I}_R + \mathbf{L}_R p \mathbf{I}_R + p \{ \mathbf{L}_{RS}(\gamma) \mathbf{I}_S + \mathbf{L}_{RR} \mathbf{I}_R + \mathbf{L}_{RF} i_F \}; \\ u_f &= R_F i_F + L_F p i_F + p \{ \mathbf{L}_{FS}(\gamma) \mathbf{I}_S + \mathbf{L}_{FR} \mathbf{I}_R + L_{FF} i_F \}, \end{aligned} \quad (9)$$

где R_1 — сопротивление обмотки статора;

$\mathbf{R}_R$ — матрица приведенных сопротивлений демпферной обмотки ротора;

L_1 — индуктивность рассеяния обмотки статора;

$\mathbf{L}_R$ — матрица приведенных индуктивностей рассеяния обмотки ротора;

$\mathbf{U}_S$ — вектор фазных напряжений статора;

u_f — приведенное напряжение обмотки возбуждения;

$\mathbf{I}_S$ — вектор токов статора;

$\mathbf{I}_R$ — вектор приведенных токов демпферной обмотки ротора;

R_F — приведенное сопротивление обмотки возбуждения;

L_F — приведенная индуктивность рассеяния обмотки возбуждения;

i_F — ток обмотки возбуждения;

$\mathbf{L}_{XX}$ — матрица индуктивностей обмоток X ;

$\mathbf{L}_{XY}(\gamma) = \mathbf{L}_{YX}^T(\gamma)$ — матрица взаимных индуктивностей обмоток X и Y ;

γ — электрический угол поворота ротора.

Корни характеристического уравнения, образованного из уравнений (10), имеют достаточно сложный вид. Для их упрощения будем считать, что потери энергии в обмотках ротора отсутствуют. Принимая допущения: $\mathbf{R}_R = 0$, $R_F = 0$, после применения преобразования Ляпунова получим уравнения в осях d и q :

$$\begin{aligned} u_d &= R_1 i_d - \omega L_q'' i_q + L_d'' p i_d; \\ u_q - E_f &= R_1 i_q + \omega L_d'' i_d + L_q'' p i_q, \end{aligned} \quad (12)$$

где $E_f = \omega L_d i_f$ — ЭДС обмотки статора;

L_d'', L_q'' — соответственно продольная и поперечная сверхпереходные индуктивности;

$R_1^* = 0,05 - 0,01$ — интервалы, которым принадлежат относительные значения параметров трехфазных явнополюсных синхронных машин в относительных единицах;

$L_d''' \approx L_q''' = 0,11 - 0,2$.

Относительные значения корней характеристического уравнения:

$$p_{1,2}^* \approx \frac{R_1^*}{2} \left(-\frac{L_d''' + L_q'''}{L_d''' L_q'''} \pm j \sqrt{\frac{4\omega^{*2}}{R_1^{*2}}} \right).$$

Относительные значения действительных частей корней:

$$\operatorname{Re}(p_{1,2}^*) \approx -\frac{R_1^*}{L_d'''}$$

Параметр, оценивающий фильтрующие свойства синхронной электрической машины:

$$\varepsilon_0 = \frac{2\pi R^*}{L_d'''} \quad (13)$$

Значения параметра $\varepsilon_0 = 0,32 - 2,8$ характеризуют фильтрующие свойства синхронного электродвигателя.

Фильтрующие свойства реактивных электродвигателей при ШИМ. Дифференциальные уравнения напряжений, описывающие динамику электромагнитных процессов реактивных электродвигателей, имеют периодические коэффициенты [1]:

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{R}_S \mathbf{I}_S + p \{ \mathbf{L}_{SS}(\gamma) \mathbf{I}_S \}, \quad (14)$$

где $\mathbf{U}_S$ — вектор напряжений на обмотках статора;

$\mathbf{I}_S$ — вектор токов в обмотках статора;

$\mathbf{R}_S = R_S \cdot \mathbf{1}$ — матрица сопротивлений обмотки статора;

R_S — сопротивление обмотки статора;

p — оператор дифференцирования по времени t ;

γ — угол поворота ротора;

$\mathbf{L}_{SS}(\gamma) = \mathbf{D}_S^T(\gamma) \mathbf{L}_0 \mathbf{D}_S(\gamma)$ — матрица основных индуктивностей m -фазной обмотки статора;

$\mathbf{D}_S(\gamma)$ — фазная матрица (5);

$\mathbf{L}_0 = \text{diag}(L_d, L_q)$ — матрица экстремальных проводимостей обмотки статора;

L_d и L_q — продольная и поперечная индуктивности соответственно.

Уравнения напряжений (14) имеют периодические коэффициенты. Их непосредственное использование для синтеза системы управления проблематично. Поэтому целесообразно их преобразование к уравнениям с постоянными коэффициентами при условиях:

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \frac{2}{m} \mathbf{D}_S(\gamma) \mathbf{U}_S; \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \frac{2}{m} \mathbf{D}_S(\gamma) \mathbf{I}_S.$$

Матрица $\mathbf{D}_S(\gamma)$ является в данном случае матрицей Ляпунова, преобразующей уравнения с периодическими коэффициентами (14) в уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения напряжений на обмотках статора и ротора (14), подвергнутые преобразованию Ляпунова, примут следующий вид:

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{R} \mathbf{I}_1 + \omega \mathbf{E} \mathbf{L}_0 \mathbf{I}_1 + \mathbf{L}_0 p \mathbf{I}_1, \quad (15)$$

где $\mathbf{E}$ — матрица поворота двухмерного вектора на угол $\pi/2$;

$\mathbf{R} = R_S$ — отображение сопротивления обмотки статора на плоскость поперечного сечения машины;

ω — угловая электрическая скорость вращения ротора.

Уравнения (15) являются отображениями исходных уравнений (14) в оси координат ротора d, q . В развернутой форме записи уравнения напряжений статора (15) в относительных единицах примут следующий вид:

$$\begin{aligned} u_d^* &= R^* i_d^* - \omega^* L_q^* i_q^* + \frac{L_d^*}{\omega_6^*} p i_d^*; \\ u_q^* &= R^* i_q^* + \omega^* L_d^* i_d^* + \frac{L_q^*}{\omega_6^*} p i_q^*. \end{aligned} \quad (16)$$

Ток продольного контура i_d намагничивает реактивную машину, а ток поперечного контура i_q определяет ее нагрузку.

Характеристический полином уравнений (16) имеет вид

$$Y(p) = L_d^* L_q^* \frac{p^2}{\omega_6^{*2}} + \omega^* R^* (L_d^* + L_q^*) \frac{p}{\omega_6^*} + R^{*2} + \omega^{*2} L_d^* L_q^*.$$

Сравнивая уравнения (12) и (16), видим, что их характеристические уравнения идентичны.

Относительные значения корней характеристического уравнения $Y(p)=0$:

$$p_{1,2}^* = \frac{R^*}{2} \left(-\frac{L_d^* + L_q^*}{L_d^* L_q^*} \pm \sqrt{\left(\frac{L_d^* - L_q^*}{L_d^* L_q^*} \right)^2 - \frac{4\omega^{*2}}{R^{*2}}} \right),$$

при малой скорости вращения ротора:

$$\omega^* \leq \frac{R^*}{2} \frac{L_d^* - L_q^*}{L_d^* L_q^*},$$

отрицательные и действительные. При $\omega^* = 0$ корни определяются выражениями:

$$p_1^* = -\frac{R^*}{L_d^*}; \quad p_2^* = p_{\max}^* = -\frac{R^*}{L_q^*}. \quad (17)$$

При большой скорости вращения корни комплексные. В этом случае модуль мнимой части корня приближенно равен ω , а действительная часть определяется выражением

$$p_{\max}^* \leq -\frac{R^*}{2} \frac{L_d^* + L_q^*}{L_d^* L_q^*} = -\frac{R^*}{2L_q^*} (1 + \xi), \quad (18)$$

где $\xi = L_q^* / L_d^*$.

Зависимости относительных значений действительных частей корней характеристического уравнения от скорости приведены на рис. 2.

Параметр, оценивающий фильтрующие свойства реактивной электрической машины, будет определяться в виде

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi R^*}{L_q^*} (1 + \xi). \quad (19)$$

Относительные значения параметров различных типов реактивных электрических машин даны в табл. 1.

Таблица 1

Относительные значения параметров различных типов реактивных машин

Тип реактивной машины	$R^* \cdot 100$	L_d^*	L_q^*	ξ	ε_0
С зубчатым ротором и статором	2–6	1,2–2	0,48–1	0,4–0,5	0,18–0,28
С анизотропной магнитной проводимостью ротора (поперечная шихтовка)	2–6	1,5–3	0,21–0,36	0,14–0,12	0,34–0,59
С анизотропной магнитной проводимостью ротора (продольная шихтовка)	2–6	1,5–3	0,15–0,24	0,1–0,08	0,46–0,85

Большие значения R^* относятся к машинам меньшей мощности. Из табл. 1 следует, что лучшими фильтрующими свойствами обладают реактивные машины с зубчатым ротором и статором.

Заключение (Conclusion)

Из опыта эксплуатации систем электрический преобразователь частоты – электрический двигатель известно, что их фильтрующие свойства достаточно высоки. При большой частоте модуляции выходного напряжения обеспечивается высокое качество токов, протекающих по нагрузке во всех рассмотренных типах электрических машин. Данное обстоятельство при высокой частоте ШИМ позволяет отказаться от специальных выходных фильтрующих устройств. Однако для крупных электрических машин и мощных электрических преобразователей при ограничениях, наложенных на частоту модуляции, показатель ε увеличивается, и фильтрующие свойства электрических машин значительно ухудшаются, что приводит к значительным пульсациям и увеличению величины дисперсии тока в нагрузке.

Выполненные исследования позволяют сравнить фильтрующие свойства различных типов электрических машин. Параметры фильтрующих свойств для различных типов электрических машин представлены в сводной табл. 2.

Таблица 2

Параметры фильтрующих свойств для различных типов электрических машин

Типы электрических машин	ε_0
Реактивные машины с зубчатым ротором и статором	0,18–0,28
Реактивные машины с анизотропной магнитной проводимостью ротора (поперечная шихтовка)	0,34–0,59
Реактивные машины анизотропной магнитной проводимостью ротора (продольная шихтовка)	0,46–0,85
Асинхронные машины	0,63–2,5
Синхронные машины	0,32–2,8

Большие значения показателей ε_0 (см. табл. 1) относятся к машинам меньшей мощности. Из приведенных значений следует, что реактивные машины с зубчатым ротором и статором обладают наилучшими фильтрующими свойствами, однако их коэффициент мощности достаточно мал. Реактивные машины с анизотропной магнитной проводимостью ротора по своим фильтрующим свойствам превосходят асинхронные и синхронные двигатели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самосейко В. Ф. Теоретические основы управления электроприводом / В. Ф. Самосейко. — СПб.: Элмор, 2007. — 464 с.
2. Bychkov M. G. Elements of the switched reluctance drive theory / M. G. Bychkov // Электричество. — 1997. — № 8. — С. 35–44.
3. Ваганов М. А. Электромагнитный момент вентильного индукторного двигателя / М. А. Ваганов, И. А. Горюшкин // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». — 2012. — № 10. — С. 69–76.
4. Голландцев Ю. А. Вентильные индукторно-реактивные двигатели / Ю. А. Голландцев. — СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2003. — 148 с.
5. Самосейко В. Ф. Реактивные электрические машины с зубчатым статором и ротором. Методика проектирования. Алгоритмы управления / В. Ф. Самосейко [и др.]. — СПб.: ФГУП «Крыловский государственный научный центр», 2016. — 174 с.
6. Nyman E. Magnet-free motor technology for field speed applications reaching “IE5” efficiency level / E. Nyman, A. Tammi, P. Termini, T. Kansakangas. — ABB, 2015. — 9 p.
7. Dmitrievskii V. Development of a High Efficient Electric Drive with Synchronous Reluctance Motor / V. Dmitrievskii, V. Prakht, V. Kazakbaev, A. Pozdeev, S. Oshurbekov // Electrical Machines and Systems (ICEMS), 2015 18th International Conference on. — IEEE, 2015. — Pp. 876–881. DOI: 10.1109/ICEMS.2015.7385158.
8. Захаров А. В. Перспективы технического применения синхронных электродвигателей с анизотропной магнитной проводимостью ротора / А. В. Захаров // Состояние и перспективы развития электро- и теплотехнологии: материалы Международной науч.-техн. конф. (XVIII Бенардосовские чтения). — Иваново: Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина, 2015. — С. 124–127.
9. Самосейко В. Ф. Синхронные электрические машины с анизотропной магнитной проводимостью ротора. Методика проектирования. Алгоритмы управления / В. Ф. Самосейко [и др.]. — СПб.: ФГУП «Крыловский государственный научный центр», 2016. — 174 с.
10. Гельвер Ф. А. Реактивный электрический преобразователь с анизотропной магнитной проводимостью ротора / Ф. А. Гельвер, Н. В. Белоусова, В. Ф. Самосейко // Труды VIII Международной (XIX всероссийской) конференции по автоматизированному электроприводу АЭП-2014 (7–9 октября 2014 г.). — Саранск: Изд-во Мордовского университета, 2014. — С. 394–398.
11. Казакбаев В. М. Разработка высокоэффективного синхронного реактивного двигателя: дис. ... канд. техн. наук; специальность 05.09.01 — Электромеханика и электрические аппараты / В. М. Казакбаев. — Екатеринбург: ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», 2017. — 128 с.
12. Браславский И. Я. Энергосберегающий асинхронный электропривод: учеб. пособие / И. Я. Браславский, З. Ш. Ишматов, В. Н. Поляков. — М.: Академия, 2004. — 256 с.
13. Дмитриевский В. А. Экспериментальное сравнение асинхронного и синхронного реактивного электродвигателей / В. А. Дмитриевский [и др.] // Труды Международной 16-й научно-технической конференции «Электроприводы переменного тока (ЭППТ 2015)». — Екатеринбург: Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 2015. — С. 19–22.

REFERENCES

1. Samoseiko, V.F. *Teoreticheskie osnovy upravleniya elektroprivodom*. SPb.: Elmor, 2007.
2. Bychkov, M. G. "Elements of the switched reluctance drive theory." *Electrical Technology Russia* 8 (1997): 35–44.
3. Vaganov, Michail Aleksandrovich, and Ivan Aleksandrovich Goriushkin. "Electromagnetic torque of reluctance motor." *Proceedings of Saint Petersburg Electrotechnical University* 10 (2012): 69–76.
4. Gollandtsev, Yu. A. *Ventil'nye induktorno-reaktivnye dvigateli*. SPb.: TsNII «Elektropribor», 2003.
5. Samoseiko, V. F., F. A. Gel'ver, V. A. Khomyak, and N. A. Lazarevskii. *Reaktivnye elektricheskie mashiny s zubchatym statorom i rotorom. Metodika proektirovaniya. Algoritmy upravleniya*. SPb.: FGUP «Krylovskii gosudarstvennyi nauchnyi tsentr», 2016.
6. Nyman, E., Ari Tammi, Pietro Savio Termini, and Tero Käsäkangas. *Magnet-free motor technology for field speed applications reaching "IE5" efficiency level*. ABB, 2015.
7. Dmitrievskii, Vladimir, V. Prakht, V. Kazakbaev, A. Pozdeev, and S. Oshurbekov. "Development of a high efficient electric drive with synchronous reluctance motor." *Electrical Machines and Systems (ICEMS), 2015 18th International Conference on*. IEEE, 2015. 876–881. DOI: 10.1109/ICEMS.2015.7385158.
8. Zakharov, A. V. "Prospects for the technical application of synchronous motors with anisotropic conductive magnetic rotor." *Sostoyaniye i perspektivy razvitiya elektro- i teplotekhnologii: Materialy mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii: (XVIII Benardosovskie chteniya)*. Ivanovo: Ivanovskii gosudarstvennyi energeticheskii universitet imeni V.I. Lenina, 2015. 124–127.
9. Samoseiko, V. F., F. A. Gel'ver, V. A. Khomyak, and D. A. Khairov. *Sinkhronnye elektricheskie mashiny s anizotropnoi magnitnoi provodimost'yu rotora. Metodika proektirovaniya. Algoritmy upravleniya*. SPb.: FGUP «Krylovskii gosudarstvennyi nauchnyi tsentr», 2016.
10. Gel'ver, F. A., N. V. Belousova, and V. F. Samoseiko. "Reaktivnyi elektricheskii preobrazovatel' s anizotropnoi magnitnoi provodimost'yu rotora." *Trudy VIII mezhdunarodnoi (XIX vserossiiskoi) konferentsii po avtomatizirovannomu elektroprivodu AEP-2014 (7-9 oktyabrya 2014 g.)*. Saransk: Izdatel'stvo mordovskogo universiteta, 2014. 394–398.
11. Kazakbaev, V. M. *Razrabotka vysokoeffektivnogo sinkhronnogo reaktivnogo dvigatelya*. PhD diss. Ekaterinburg: FGAOU VO «Ural'skii federal'nyi universitet imeni pervogo Prezidenta Rossii B.N. El'tsina», 2017.
12. Braslavskii, I. Ya., Z. Sh. Ishmatov, and V. N. Polyakov. *Energoberegayushchii asinkhronnyi elektroprivod: Uchebnoe posobie dlya stud. vyssh. ucheb.zavedenii*. M.: Akademiya, 2004.
13. Dmitrievskii, Vladimir A., Vladimir A. Prakht, Vadim V. Kazakbaev, Andrey S. Pozdeev, Safarbek H. Oshurbekov, and Alexander F. Mikhailitsyn. "Experimental comparison of induction and synchronous reluctance electric drive performance." *Trudy mezhdunarodnoi shestnadsatoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii «Elektroprivody peremennogo toka (EPPT 2015)»*. Ekaterinburg: Ural'skii federal'nyi universitet imeni pervogo Prezidenta Rossii B.N. El'tsina, 2015. 19–22.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Гельвер Фёдор Андреевич —
кандидат технических наук
ФГУП «Крыловский государственный научный центр»
196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург,
Московское шоссе, 44
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: gelfer@bk.ru, kaf_electroprivod@gumrf.ru
Белузов Игорь Владимирович —
ведущий инженер
ФГУП «Крыловский государственный научный центр»
196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург,
Московское шоссе, 44
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул.
Двинская, 5/7
e-mail: ibel@bk.ru, kaf_electroprivod@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Gelver, Fedor A. —
PhD
Krylov State Research Center
44 Moscow highway, St. Petersburg, 196158,
Russian Federation
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: gelfer@bk.ru, kaf_electroprivod@gumrf.ru
Belousov, Igor V. —
Leading Engineer
Krylov State Research Center
44 Moscow highway, St. Petersburg, 196158,
Russian Federation
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: ibel@bk.ru, kaf_electroprivod@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 25 января 2019 г.
Received: January 25, 2019.