ВЕСТНИК ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА ИМЕНИ АДМИРАЛА С. О. МАКАРОВА

DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274

OPTIMIZATION OF NAVIGATIONAL ISOSURFACE SIMULATION BY THE METHODS OF BASIC FINITE SPLINES

I. V. Yuyukin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The optimized algorithm for navigational isosurface of any constructional complexity is proposed in the paper. Spline interpolation of navigational isoline is considered only as a particular case of decision for three-dimensional problem. The formalization of the modified mathematical apparatus for the practical synthesis of navigational isosurface based on the methods of basic finite splines is given. The advantage of the offered approach is demonstrated by the decision of the task for the generation of geoidal spline model as an argument, of the practical applicability of the developed method. The hybrid algorithm of approximation by B-splines in the combination with smooth analogues of Lagrangian splines is absolutely universal in independence from the specific factual presentation of the real navigational isosurface that allows us to solve the wide spectrum of applied navigation problems. The effective search for measurement errors of navigation parameters by the methods of computer visualization of the geometrically restored base of the digital data becomes possible when using the optimized model of spline approximation. The fictitiousness of any measurement will be unambiguously detected by the noise peak of blunder which occurs due to the breach of the smoothness of the approximated navigational isosurface. Based on the analysis of the imitation spline surface, the identified measurement error can be promptly eliminated from the data set with minimal time consuption without using special computer animation tools. The issue of calculative accuracy of the algorithm and compactness of navigational information storage has been investigated by the author's organized computing experiments.

Keywords: Basic spline, finiteness, B-spline, spline interpolation, spline approximation, analogues of Lagrangian splines, the hybrid algorithm of approximation, geoidal spline model.

For citation:
Yuyukin, Igor V. "Optimization of navigational isosurface simulation by the methods of basic finite splines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.2 (2019): 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.

УДК 656.61.052 656

ОПТИМИЗАЦИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАВИГАЦИОННОЙ ИЗОПОВЕРХНОСТИ МЕТОДАМИ БАЗИСНЫХ ФИНИТНЫХ СПЛАЙНОВ

И. В. Ююкин

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Предлагается оптимизированный алгоритм моделирования навигационной изоповерхности любой конструктивной сложности. Сплайн-интерполяция навигационной изолинии рассматривается только как частный случай решения пространственной задачи. Приводится формализация модифицированного математического аппарата практического синтеза навигационной изоповерхности на основе методов базисных финитных сплайнов. Преимущество предлагаемого подхода демонстрируется решением задачи генерирования геоидной сплайновой модели в качестве доказательства практической применимости разработанного способа. Гибридный алгоритм аппроксимации B-сплайнами в комбинации с гладкими аналогами лагранжевых сплайнов является абсолютно универсальным в смысле независимости от конкретного фактического представления реальной навигационной изоповерхности, что позволяет решать широкий спектр прикладных задач судовождения. При использовании оптимизированной модели сплайн-аппроксимации становится возможным осуществление эффективного поиска ошибок измерений навигационных параметров методами компьютерной визуализации геометрически восстановленной базы цифровых данных. Фиктивность любого измерения будет однозначно обнаружена по шумовому пику промаха, возникающему за счёт нарушения гладкости аппроксимированной навигационной изоповерхности. На основе *анализа имитационной сплайновой поверхности найденную ошибку измерений оперативно можно исключить из массива данных с минимальными временными затратами без привлечения специальных средств компьютерной анимации. С помощью предложенных в статье вычислительных экспериментов исследован вопрос расчетной точности алгоритма и компактности хранения навигационной информации.*

Ключевые слова: базисный сплайн, финитность, B-сплайн, сплайн-интерполяция, сплайн-аппроксимация, аналоги лагранжевых сплайнов, гибридная модель аппроксимации, сплайновая модель геоида.

Для цитирования:
Ююкин И. В. Оптимизация моделирования навигационной изоповерхности методами базисных финитных сплайнов/ И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 2. — С. 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.

Введение (Introduction)

Актуальность алгоритмизации навигационных задач методами сплайн-функций обусловлена необходимостью эффективной автоматизированной обработки навигационной информации за счет создания универсальных и качественных вычислительных модулей. При современном уровне развития навигационных интегрированных систем, когда достигнут прогресс в изготовлении надежных компьютерных микросхем, особую важность приобретает задача разработки перспективных алгоритмов.

Методы, основанные на сплайнах, занимают ведущее место как среди перспективных алгоритмов непосредственно вычислительной математики, так и в задачах автоматизированной обработки навигационной информации. Анализируя современное состояние теории базисных сплайн-функций по научным публикациям [1]–[3], необходимо отметить, что фактически только условно обозначено направление возможных решений, но не даются конкретные практические рекомендации прикладных реализаций. В работе [4] отмечается, что использование финитности является безусловным преимуществом сплайнового алгоритма. Параметрическое представление базисных сплайнов, использованное в исследованиях [5], [6], дает наглядное представление о математической формализации метода, но организует реальные сложности при компьютерной реализации алгоритма.

Фундаментальная разработка решений навигационных задач методами классической полиномиальной сплайн-интерполяции с позиций теории приближения функций впервые выполнена доктором технических наук, профессором А. М. Жухлиным [7]. Традиционные сплайны показали эффективность по быстродействию при интерполяции навигационных изолиний, но уступают базисным сплайнам по компактности хранения информации и по вычислительным особенностям при синтезе навигационной изоповерхности [8]. Ранее предлагаемый подход игнорировался по причине алгоритмической сложности математической формализации навигационной изоповерхности.

Общее направление научного исследования можно определить как создание прогрессивного математического и программного судового обеспечения на единой методологической основе методов сплайн-функций. Целью подхода является достижение быстродействия вычислительных реализаций при наличии возможности получения результата в масштабе реального времени и обеспечение высокой алгоритмической точности навигационных расчетов при условии компактности хранения навигационной информации. Для достижения указанной цели сформулированы следующие задачи:

1. Создание алгоритма сплайнового восстановления навигационной изолинии как частного случая двумерной аппроксимации.
2. Оптимальное решение проблемы моделирования навигационной изоповерхности любой степени сложности методами базисных финитных сплайнов.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Теоретической основой алгоритмизации навигационных задач послужила апробация методов математического аппарата сплайн-функций. Применимость сплайнов при решении рассматриваемой проблемы можно объяснить следующими причинами. Во-первых, обязательным условием сплайн-интерполяции является необходимость использования информации дискретных результатов измерений. Проведение подобных измерений практически выполнимо при использовании современной аппаратуры либо необходимые данные имеются в навигационных пособиях в табулированном виде. Во-вторых, алгоритмы, построенные с помощью сплайнов, эффективно реализуются в программном обеспечении бортового компьютера. Оперирование с кусочными многозвенниками является эффективным с точки зрения проведения вычислений [9]. Расчет сплайн-функций или значений ее производных сопряжен только с умножением и сложением, что обусловливает высокую результирующую точность. Кроме того, сплайн является гладкой функцией в смысле успешной дифференцируемости. Положительным аспектом применения сплайнов являются хорошая сходимость и вычислительная устойчивость расчетных сплайновых процедур.

Сплайны представляют собой универсальное математическое средство восстановления изолиний по дискретным измерениям навигационных параметров по причине независимости от конкретного вида навигационной функции. Формат функции определяет только объем памяти судового компьютера с предварительно рассчитанными сплайновыми коэффициентами и сеточными координатами для вычисления в масштабе реального времени значения навигационной функции по номеру сеточного интервала. Поэтому сплайновые аппроксимации являются высокоскоростным средством решения разнообразных навигационных задач.

В случае точных измерений навигационных параметров решается задача интерполяции, т. е. построения такой навигационной функции, которая в соответствующих точках строго принимает значения навигационных параметров. Если погрешности измерений значительные, то решается задача аппроксимации, состоящая в отыскании навигационной функции, имеющей плавный характер и проходящей в некоторой окрестности измеренных данных.

В предлагаемой статье рассматриваются нетрадиционные для судовождения базисные финитные сплайны (сокращенно — *B*-сплайны). При моделируемой совокупности линейно независимых финитных функций $B_i(x)$ предлагается к реализации следующая алгоритмическая комбинация:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i B_i(x), \tag{1}$$

где c_i — скалярные коэффициенты, подлежащие математическому определению.

Принципиальная идея кусочной аппроксимации заключается в том, что весь интервал возможных значений аргумента навигационной функции разбивается на частичные сеточные отрезки и на каждом из них фрагмент навигационной изолинии приближенно заменяется сплайном.

Опрометчиво думать, что базисный сплайн физически тождественен приближаемой функциональной математической зависимости. В современной научной литературе наблюдается ошибочное представление по этому поводу. Цитата американского профессора Карл де Бора однозначно проясняет запутанную ситуацию при акцентировании внимания на факт, что *B*-сплайн является только базисной искусственной функцией, а не самим фактическим фрагментом кривой [10]. Реальная параметрическая кривая синтезируется путем умножения последовательности $B_i(x)$ на специальным образом подобранные скалярные коэффициенты c_i в каждой узловой точке. Таким образом, базисная функция математически является вторичной по отношению к оригинальной функциональной зависимости. Подмена понятий скрывает технологическую сущность процесса сплайн-аппроксимации.

Отличие базисного сплайна заключается в финитности его конструкции. Каждый *B*-сплайн строится на нескольких сеточных сегментах. Количество сеточных отрезков, являющихся носителем *B*-сплайна, определяется его степенью. Для получения выигрышной аппроксимации чаще всего используются кусочные полиномы третьей степени. Реализуемый кубический сплайн имеет класс «гладкости» C^2 и минимальный компактный носитель. Рассмотрим представление кубического *B*-сплайна в одномерном случае на пятикратном узловом полигоне (рис. 1).

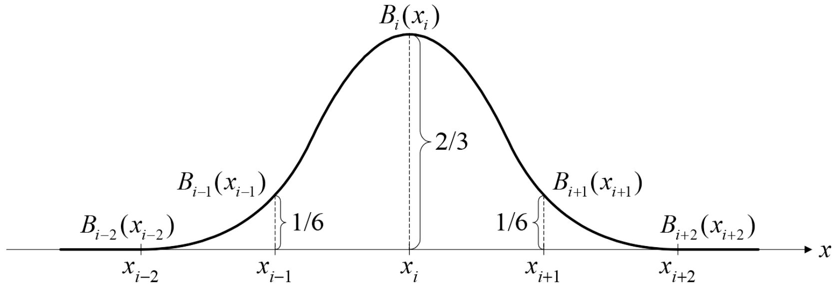

Рис. 1. Базисная функция кубического *B*-сплайна

Финитность математической конструкции означает, что нормализованные функции *B*-сплайна практически имеют ненулевые значения только на сеточных интервалах, которые составляют его носитель без учета граничных условий. Свойство нормализованности однозначно удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=1}^{k} B_i(x_i) = 1, \tag{2}$$

где k — степень сплайна.

Узловые значения $B_i(x_i)$ базисного кубического сплайна на пятиузловом сеточном интервале принимают следующие числовые значения (рис. 1):

$$B_i(x_i) = \frac{2}{3};\ \ B_{i-1}(x_{i-1}) = B_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{1}{6};\ \ B_{i-2}(x_{i-2}) = B_{i+2}(x_{i+2}) = 0.$$

Последовательность узловых *B*-сплайновых значений состоит из положительных функций, в сумме равных единице, что следует из понятия нормализованности соотношения (2):

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0 = 1.$$

Узловые значения нормализованных функций *B*-сплайна вычисляются эффективным способом при применении устойчивых адаптированных автором рекурретных формул [8]. Так как функции $B_i(x_i)$ финитны, в каждом узле x_i от нуля отличны только активные функции с номерами $i-1$, i, $i+1$ (рис. 1). Следовательно, условия интерполяции навигационной изолинии в одномерном случае приобретают вид

$$c_{i-1}B_{i-1}(x_i) + c_i B_i(x_i) + c_{i+1}B_{i+1}(x_i) = f_i,\ \ i = 1,\dots n. \tag{3}$$

Предлагается оригинальный способ вычисления приближаемой кубическими *B*-сплайнами навигационной функции для произвольного аргумента . Для этого необходимо использовать только коэффициенты четырех узловых *B*-сплайнов (рис. 2).

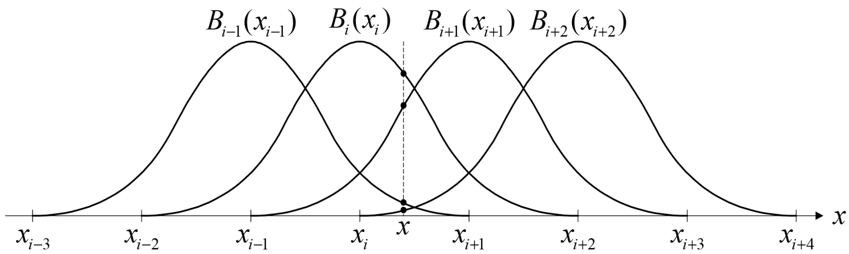

Рис. 2. Вычисление значения *B*-сплайна для произвольного аргумента навигационной функции

В силу финитности функций $B_j(x)$, $j = i-1, \dots, i+2$ в развернутом виде кубический B-сплайн (1) можно представить следующим образом:

$$S(x) = c_{i-1}B_{i-1}(x) + c_iB_i(x) + c_{i+1}B_{i+1}(x) + c_{i+2}B_{i+2}(x) \tag{4}$$

Предлагаемым способом для любой произвольной точки $x \in [x_1, x_{i+1}]$ вычисляется значение *B*-сплайна при использовании только четырех базисных функций в одномерном случае.

На основе разработанного алгоритма составлен программный паскаль-модуль. По результатам проверки на тестовых экспериментах уравнение круга равных высот рассчитывается авторским методом с точностью10^{-5}–10^{-6} угл. мин [8]. С целью синтезирования навигационной изоповерхности на расширенной прямоугольной сетке организуется две системы *B*-сплайнов: $B_{i,k}(\varphi)$ и $B_{j,m}(\lambda)$. Поставленная задача сводится к вычислению значения двумерного базисного сплайна в произвольной точке (φ_*, λ_*), принадлежащей прямоугольному фрагменту $\Omega_{i,j}$. Для этого необходимо знать значения четырех базисных функций по каждой координате φ и λ. Каркасная сплайновая поверхность, в отличие от кривой, должна каждый раз приближаться к четырем угловым точкам характеристического патча $\Omega_{i,j}$ или в случае интерполяции строго проходить через данные четыре точки.

Таким образом, первоначально выясняются номера узловых базисных функций, носители которых покрывают сплайновый лоскут $\Omega_{i,j}$. Это будут функции $B_{i-1,\ldots\ldots,i+2,k}(\varphi)$ $B_{j-1,\ldots\ldots,j+2,m}(\lambda)$. В конечном итоге, требуется вычислить значения 16 узловых базисных функций.

Если взять всевозможные произведения $B_{i,k}(\varphi)$ и $B_{j,m}(\lambda)$, то двумерный *B*-сплайн класса гладкости $C^{k-1,m-1}$ может быть сформирован как однозначное представление в виде

$$S(\varphi, \lambda) = \sum_{i=-k}^{g+k+1} \sum_{j=-m}^{h+m+1} B_{i,k}(\varphi_q) B_{j,m}(\lambda_r) C_{i,j}, \tag{5}$$

где k, m — степени *B*-сплайна по координатным осям φ и λ соответственно;

g, h — максимальное количество узлов на сеточных интервалах φ и λ;

$B_{i,k}(\varphi)$, $B_{j,m}(\lambda)$ — узловые функции базисного сплайна;

$C_{i,j}$— матрица подлежащих математическому определению скалярных коэффициентов.

Такой сплайн как минимум один раз непрерывно дифференцируем по каждой из переменных, т. е. соседние клетки сплайна гладко *склеены* между собой до непрерывности производной, на единицу меньшей, чем степень сплайна.

Результаты (Results)

Массиву дискретных измерений навигационных параметров в пространстве соответствует определенная поверхность положения, интерпретируемая как изоповерхность. Таким образом, изоповерхность рассматривается как геометрическое представление скалярного навигационного поля результатов измерений. Навигационные изолинии графически являются контурными линиями уровня навигационной изоповерхности при рассмотрении одного конкретного проекционного сечения. При этом процедуру восстановления контура исследуемой навигационной изоповерхности можно абстрактно представить как результат траекторного движения одной сплайновой навигационной изолинии параллельно самой себе в трехмерном пространстве [11].

Важным результатом является разработка эффективного высокоточного *B*-сплайнового алгоритма математического синтеза навигационной изоповерхности. Особая значимость применяемого подхода в судовождении возникает в случае сложной математической формализации изоповерхности и невозможности обеспечения необходимой дискретности измерений числового поля навигационных параметров. Практический синтез структуры навигационной изоповерхности обеспечивается аппроксимацией реального объемного профиля каркасной сплайновой моделью в автономной программной графической среде без привлечения посторонних фирменных средств компьютерной визуализации.

В рамках алгоритма допустимы вариации сплайнов второй, третьей и четвертой степени. Для практического применения оптимальными являются бикубические сплайны при условии приближения изоповерхностей, не характеризующихся значительными изменениями градиентов. В случае восстановления изоповерхности сложной волнообразной структуры предоставляется алгоритмическая возможность независимого выбора по каждой координате степени сплайна, что может позволить получить близкую к реальному профилю линейчатую генерируемую поверхность. Благодаря базисной финитной структуре *B*-сплайна объем хранимой информации сокращается практически в 4 раза по сравнению с алгоритмом классической полиномиальной сплайн- интерполяции. При дополнении к (5) ортогональных условий получаем оптимизированную гибридную модель двумерной В-сплайновой аппроксимации и интерполяции сплайновыми полиномами Лагранжа:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=-k}^{g+k+1}\sum\limits_{j=-m}^{h+m+1} B_{i,k}(\varphi_q)B_{j,m}(\lambda_r)C_{i,j} = F_{q,r}F \quad q=1,\dots z_1; r=1,\dots z_2; \\ \dfrac{1}{\sqrt{p}}\sum\limits_{i=-k}^{g+k+1}\sum\limits_{j=-m}^{h+m+1} B_{i,k}(\varphi_q)L_{j,r}(\lambda_r)C_{i,j} = 0 \quad q=1,\dots z_1; r=1,\dots h; \\ \dfrac{1}{\sqrt{p}}\sum\limits_{i=-k}^{g+k+1}\sum\limits_{j=-m}^{h+m+1} B_{j,m}(\lambda_r)L_{i,q}(\varphi_q)C_{i,j} = 0 \quad q=1,\dots g; r=1,\dots z_2; \\ \dfrac{1}{p}\sum\limits_{i=-k}^{g+k+1}\sum\limits_{j=-m}^{h+m+1} L_{i,q}(\varphi_q)L_{j,r}(\lambda_r)C_{i,j} = 0 \quad q=1,\dots g; r=1,\dots h, \end{cases} \tag{6}$$

где p — сглаживающий весовой коэффициент;

z_1, z_2 — максимальное число дискретных измерений навигационных параметров по координатным осям φ и λ соответственно;

$L_{i,q}$, $L_{j,r}$ — гладкие аналоги лагранжевых сплайнов.

Набор из сплайновых полиномов Лагранжа, по мнению автора статьи, организует тактическую альтернативу *B*-сплайну в рамках одной модифицированной математической системы (6). Вообще гибридный алгоритм позволяет использовать в практических расчетах преимущества каждого метода в зависимости от конкретной практической ситуации [12].

Введение ортогональных условий дополнительно к (5) обеспечивает диагональность матрицы скалярных сплайновых коэффициентов, что существенно облегчает задачу решения алгебраической системы уравнений (6).

Множители $L_{i,q}$ и $L_{j,r}$ являются локальными интерполяционными полиномами Лагранжа [13], сконструированными на аналогичных узловых носителях *B*-сплайнов.

В результате решения парадигмы (6) в блочно-диагональной матричной форме методом наименьших квадратов определяются неизвестные скалярные коэффициенты двумерного *B*-сплайна. Техника оперирования с блочными матрицами производится по тем же правилам матричного исчисления, как и в случае, когда вместо блоков задействуются традиционные матрицы.

Настоящее исследование имеет прикладной характер с доведением до вычислительной реализации решения рассматриваемых задач. Разработанные автором статьи компьютерные графические средства позволяют синтезировать электронные перспективы моделируемых навигационных изоповерхностей. Задание в интерактивном режиме весового коэффициента [14] дают возможность компенсировать погрешности измерений навигационных параметров и восстанавливать реальный объемный профиль.

Программный модуль обеспечивает надежные устойчивые вычисления при равномерной и неравномерной сетке независимо от регуляризации и хаотичности выполненных измерений. Исследован вопрос расчетной точности программной процедуры. Алгоритмическая точность по данным специально проведенного вычислительного эксперимента составляет порядок 10^{-8}м [8]. Программный модуль двумерной *B*-сплайновой аппроксимации адекватно реализует алгоритмические возможности. Разработанный пакет прикладных программ является многофункциональным в смысле возможности расчета и визуализации на компьютерном дисплее электронной перспективы навигационной изоповерхности любой конструктивной сложности.

Обсуждение (Discussion)

Максимальная точность глобальной навигации непосредственно связана со сплайновым моделированием реальной формы Земли. Топографическая поверхность Земли образует фигуру неправильной и сложной грушевидной формы. Формализовать такую поверхность при помощи классических аналитических зависимостей считалось до проведения настоящего исследования невозможным. При использовании оригинального метода на основе базисных сплайнов практической реальностью становится восстановление навигационной изолинии или изоповерхности любой степени сложности. Предварительно синтезируемой изоповерхности следует делать геометрическую оценку сложности аппроксимируемого объекта с целью выбора оптимального способа решения. Для этого автором статьи разработана специальная эффективная методика качественного исследования навигационной изоповерхности.

Необходимость оперирования исходными данными прямых измерений гравитационного поля и трудности геодезических вычислительных процедур делают актуальным поиск нового перспективного *B*-сплайнового метода решения задачи моделирования уровенной поверхности океана [15], [16]. При очевидной сложности проблемы необходим поиск новых путей синтеза геоидной модели Земли в приемлемом для использования в морской навигации виде. Максимальное повышение точности спутниковых обсерваций при условии предельных требований к точному восстановлению геоида может быть эффективно обеспечено применением *метода базисных сплайнов*.

На основе разработанного алгоритма выполнен компьютерный эксперимент моделирования электронного профиля геоида. Геометрическая интерпретация вычислительных реализаций алгоритма сплайн-аппроксимации апробируется построением на дисплее компьютера фрагментов электронных перспектив геоида в различных ракурсах с целью демонстрации работоспособности предлагаемого математического аппарата.

Авторский алгоритм может быть использован на микропроцессорном уровне в перспективных спутниковых приемоиндикаторах или в электронных векторных картографических системах с целью использования в практике судовождения преимуществ, следующих из его применения. Возможен вариант хранения программных модулей в памяти бортовых вычислительных средств, что обеспечивает преимущества в оперативной возможности корректировки массива данных по мере обновления информации. При таком подходе достигается высокая точность пульсирующих вычислений геоидной поправки вследствие возможности использования уточнённых измерений контрольных станций спутникового слежения. Способ хранения информации в судовом компьютере исключает проблему модернизации приемоиндикатора при необходимости обновления измерительной информации.

Заключение (Conclusion)

Впервые успешно выполнены быстродействующие вычисления как любых изолиний, так и навигационных изоповерхностей методами B-сплайнов на основе разработанной автором статьи вычислительной процедуры. Полученные преимущества в быстродействии, универсальности и устойчивости вычислений программной реализации разработанных *B*-сплайновых алгоритмов позволят повысить компактность хранения и скорость обработки навигационной информации при включении разработанных прикладных модулей составной частью в программное обеспечение бортового компьютера. Универсальность составленных программ обеспечивает вычислительную реализацию широкого класса навигационных задач. Разработанный пакет прикладных программ является многофункциональным по возможности расчета и визуализации на компьютерном дисплее электронных проекций любой навигационной изоповерхности при использовании авторской программной оболочки.

Важным результатом является практическая реализация задачи использования сложных изолиний с проблематичной формализацией ввиду математического излома этих изолиний с учетом скалярного поля поправок. Потенциальная возможность использования в целях судовождения сетки искаженных изолиний устраняет необходимость многочисленного пересчёта варьирующих корректирующих поправок для учета судоводителем систематической погрешности.

Самостоятельный интерес представляет дополнительная возможность использования разработанного алгоритма для поиска ошибок измерений в скалярном поле навигационных параметров при наличии значительного массива данных эксперимента методом компьютерной визуализации сплайновой изоповерхности. Предлагаемый новый подход может значительно упростить анализ апостериорной точности измерительной базы данных и обеспечить адекватное использование навигационных параметров. Поскольку прерогативой предлагаемого метода является формальный поиск ошибок, в рамках рассматриваемого подхода нет необходимости задействовать специальные методы компьютерной анимации. Фиктивность однозначно будет обнаружена по шумовому пику промаха, возникающему вследствие нарушения гладкости восстановленной сплайновой изоповерхности. Данная ошибка оперативно может быть исключена из файла данных измерений с минимальными временными затратами.

Впервые решена задача оптимизации восстановления скалярного поля навигационных параметров с использованием нетрадиционных для судовождения базисных финитных сплайнов.

Альтернативный вариант решения задачи определения места судна на сплайновой модели геоида может дать при практическом применении максимальную точность навигации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Boor Carl.*A Practical Guide to Splines / Carl de Boor. — Revised Edition. — New York: Springer-Verlag, 2001. — 355 p.

2. *De Boor Carl*. Box Splines / Carl de Boor, K. Holling, S. Riemenschneider. —New York: Springer-Verlag, 2014. — 222 p.

3. *Holling K.* Approximation and Modeling with B-Splines / K. Holling, J. Holling. — SIAM, 2015. — 214 p.

4. *Holling K.* Finite Element Methods with B-Splines / K. Holling. — SIAM, 2012. — 156 p.

5. *Prautzsch H.* Bezier and B-Spline Techniques / H. Prautzsch, W. Boehm, M. Paluszny. — New York: Springer-Verlag Science & Business Media, 2013. — 304 p.

6. *Wang H.* Construction of B-spline surface from cubic B-spline asymptotic quadrilateral / H. Wang, C. Zhu, C. Li //Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing. — 2017. — Vol. 11. — № 4. — Pp. 1–12. DOI: 10.1299/jamdsm.2017 jamdsm0044.

7. *Жухлин А. М.* Обработка навигационной информации в системах обеспечения безопасности плавания с позиций теории приближения функций: дис. … д-ра техн. наук / А. М. Жухлин. — Л., 1984. — 325 с.

8. *Ююкин И. В.* Алгоритмизация навигационных задач на основе методов кусочных аппроксимаций: дис. … канд. техн.наук / И. В. Ююкин. — Л., 1991. — 119 с.

9. *Волков Ю. С.* Сплайны как инструмент геометрического моделирования (к 80-летию со дня рождения Ю.С. Завьялова) / Ю. С. Волков, В. Л. Мирошниченко, С. И. Фадеев // Сибирские электронные математические известия. — 20 11. —Т. 8. —С. A11–A16.

10. *De Boor Carl.* B(asic)-Spline Basics / Carl de Boor // Fundamental Developments of Computer-Aded Geometric Modeling. — New York: Academic Press, 1993.—Pp. 27–49.

11. *Yang H.* Construction of B-spline surface with B-spline curves as boundary geodesic quadrilateral / H. Yang, G. Wang // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 290. —Pp. 104–113. DOI: 10.1016/j.cam.2015.05.004.

12. *Gatilov S. Y.* Vectorizing NURBS surface evaluation with basic functions in power basis / S. Y. Gatilov // Computer-Aided Design. — 2016. —Vol. 73. —Pp. 26–35. DOI: 10.1016/j.cad.2015.10.006.

13. *Kano H.* B-Spline Trajectory Planning with Curvature Constraint / H. Kano, H. Fujioka // 2018 Annual American Control Conference (ACC). — IEEE, 2018. — Pp. 1963–1968. DOI: 10.23919/ACC.2018.8431703.

14. *Kvasov B.* Weighted cubic and biharmonic splines / B. Kvasov, T. W. Kim //Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. —Vol. 57. —Is. 1. —Pp. 26–44. DOI: 10.1134/S0965542517010109.

15. *Гомонов А. Д.* Построение зональных карт уровенной поверхности океана по спутниковым данным на основе B-сплайн-интерполяции / А.Д. Гомонов //Вестник Мурманского государственного технического университета. — 2010. —Т. 13. —№ 4-2. — С. 1087–1091.

16. *Гомонов А. Д.* Математическое моделирование уровенной поверхности океана по спутниковым данным на основе двумерной B-сплайн аппроксимации: дис. … канд. техн. наук / А. Д. Гомонов. — СПб., 2011. — 18 с.

REFERENCES

1. De Boor, Carl. *A Practical Guide to Splines (Revised Edition).* New York: Springer-Verlag, 2001.
2. De Boor, Carl, K. Holling, and S. Riemenschneider. *Box Splines*. New York: Springer-Verlag, 2014.
3. Holling, K., and J. Holling. *Approximation and Modeling with B-Splines*. SIAM, 2015.
4. Holling, K. *Finite Element Methods with B-Splines*. SIAM, 2012.
5. Prautzsch, H., W. Boehm, and M. Paluszny. *Bezier and B-Spline Techniques*. New York: Springer-Verlag Science & Business Media, 2013.
6. Wang, Hui, Chun-Gang Zhu, and Cai-Yun Li. "Construction of B-spline surface from cubic B-spline asymptotic quadrilateral." *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing* 11.4 (2017): 1-12. DOI: 10.1299/jamdsm.2017 jamdsm0044.
7. Zhukhlin, A. M. Obrabotka navigatsionnoi informatsii v sistemakh obespecheniya bez-opasnosti plavaniya s pozitsii teorii priblizheniya funktsii. Dr. Diss. L., 1984.
8. Yuyukin, I. V. Algoritmizatsiya navigatsionnykh zadach na osnove metodov kusochnykh approksimatsii. PhD Diss. L., 1991.
9. Volkov, Yuriy Stepanovich, Valerii Leonidovich Miroshnichenko, and Stanislav Ivanovich Fadeev. "Splines as a geometric modeling tool (to the 80 anniversary of the birth of Yu. S. Zav'yalov)." *Siberian Electronic Mathematical Reports* 8 (2011): A11–A16.
10. De Boor, Carl. "B(asic)-Spline Basics." *Fundamental Developments of Computer-Aded Geometric Modeling.* New York: Academic Press, 1993. 27–49.
11. Yang, Huogen, and Guozhao Wang. "Construction of B-spline surface with B-spline curves as boundary geodesic quadrilateral." *Journal of Computational and Applied Mathematics* 290 (2015): 104–113. DOI: 10.1016/j.cam.2015.05.004.
12. Gatilov, Stepan Yu. "Vectorizing NURBS surface evaluation with basis functions in power basis." *Computer-Aided Design* 73 (2016): 26–35. DOI: 10.1016/j.cad.2015.10.006
13. Kano, Hiroyuki, and Hiroyuki Fujioka. "B-Spline Trajectory Planning with Curvature Constraint." *2018 Annual American Control Conference (ACC).* IEEE, 2018. 1963–1968. DOI: 10.23919/ACC.2018.8431703
14. Kvasov, Boris, and Tae-Wan Kim. "Weighted cubic and biharmonic splines." *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 57.1 (2017): 26–44. DOI: 10.1134/S0965542517010109
15. Gomonov, A. D. "Constructing regional maps of oceanic currents basing B-spline interpolation of seasurface level anomalies using satellite data." *Vestnik Murmanskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta* 13.4-2(2010): 1087–1091.
16. Gomonov, A. D. Matematisheskoe modelirovanie urovennoy povershnosti oceana po sputnikovym dannym na osnove dvumernoy B-spline approksimatcii. Abstract of PhD diss. SPb, 2011.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ююкин Игорь Викторович —
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация,
г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
e-mail: *enigma_777@mail.ru*

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yuyukin, Igor V. —
PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035, Russian Federation
e-mail: *enigma_777@mail.ru*

Статья поступила в редакцию 7 февраля 2019 г.
Received: February 7, 2019.