

THE ASSESSMENT OF THE VESSEL'S LONGITUDE DEAD RECKONING METHOD ERROR

V. V. Deryabin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

An expression for the upper bound of the absolute value of the vessel's geodetic longitude dead reckoning method error has been derived in the paper. The error appears due to simplifying the equation of latitude dead reckoning. The simplification is the substitution of the transcendental function in the equation for the constant value which equals the function value for the minimum absolute value of the vessel's latitude. The derived formula includes the upper bound of the absolute value of the latitude dead reckoning method error; the maximum absolute value of the east speed component; the sailing duration; the latitude maximum absolute value during sailing; and the ellipsoid parameters which are used for calculating the vessel's coordinates. The expression for the upper bound is valid if the vessel's geodetic height remains constant during sailing. It does not take into account input data errors, errors of rounding in the navigational electronic computer and methodical errors caused by integration of the north and the east velocity components (provided they are set as the table values). Corresponding error calculations have been carried out for the different speed modes and time of vessel sailing. The calculations results are consistent with the considerations which could be made on the basis of the derived expression. The formula for the upper bound of the vessel's longitude method error does not work in the vicinities of the poles because the upper bound tends to infinity as it approaches them. The proposed calculated expression combined with the corresponding expressions for latitude can be used for testing the other dead reckoning algorithms implemented in the navigational equipment.

Keywords: vessel's geodetic longitude, dead reckoning formulas, Cauchy's problem, approximate solution, method error, upper bound.

For citation:

Deryabin, Victor V. "The assessment of the vessel's longitude dead reckoning method error." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.3 (2019): 430–438. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-3-430-438.

УДК 656.61.052:527.61

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СЧИСЛЕНИЯ ДОЛГОТЫ СУДНА

В. В. Дерябин

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе получено выражение для верхней границы модуля погрешности метода счисления геодезической долготы судна, возникающей в результате упрощения уравнения счисления широты. Упрощение заключается в переходе от уравнения счисления широты, содержащего под знаком интеграла трансцендентную функцию, к уравнению, где указанная функция считается всегда равной ее значению при минимальной по модулю широте. Выведенная формула включает верхнюю границу модуля погрешности метода счисления широты, наибольшее значение модуля восточной составляющей абсолютной скорости в течение плавания, длительность плавания, наибольшее значение модуля широты в процессе плавания, а также параметры эллипсоида, по отношению к которому определяются счисляемые координаты. Выражение для верхней границы справедливо, когда при движении геодезическая высота судна остается постоянной. Оно не учитывает погрешности исходных данных, погрешности округления в навигационной электронной вычислительной машине, а также методические погрешности, связанные с интегрированием северной и восточной составляющих скорости, если они задаются таблично. Выполнены расчеты верхней границы модуля методической погрешности с использованием выведенного соотношения для различных скоростных режимов и длительностей плавания судна. Результаты расчетов согласуются с выводами, которые мож-

но сделать на основе выведенной формулы. Формула оценки погрешности долготы не работает в окрестности полюсов, так как оценка стремится к бесконечности по мере приближения к ним. Предлагаемое расчетное соотношение совместно с соответствующими выражениями для широты может использоваться для тестирования других алгоритмов счисления, реализованных в навигационной аппаратуре.

Ключевые слова: геодезическая долгота судна, формулы счисления, задача Коши, приближенное решение, погрешность метода, верхняя граница.

Для цитирования:

Дерябин В. В. Оценка погрешности метода счисления долготы судна / В. В. Дерябин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 3. — С. 430–438. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-3-430-438.

Введение (Introduction)

Система счисления пути судна характеризуется постепенной потерей точности по мере плавания. Причинами потери точности счисления являются ошибки исходных данных, погрешности округления чисел в навигационной ЭВМ, а также ошибки приближенных методов решения. Исследованию погрешностей счисления пути посвящено достаточно много работ. Например, в исследованиях [1]–[3] изучаются, как правило, ошибки счисления в рамках статистического подхода, основанного на сборе невязок в заданном районе плавания. В работе [4] рассматривается влияние погрешностей измерителей скорости на точность счислимого места судна. В исследовании [5] изучение процесса счисления смещено в сторону подводной навигации. В работе [6] предлагается алгоритм оценки точности счисления на основе нейронной сети. Общим для указанных исследований является то, что в них изучаются ошибки исходных данных. Другие погрешности (метода, округления чисел в ЭВМ) рассмотрены в значительно меньшей степени. Например, в малой степени изучено влияние погрешностей, возникающих при использовании тех или иных методов счисления.

Погрешность метода счисления может показаться, на первый взгляд, незначительной, однако современное состояние теории не позволяет, как правило, количественно точно (аналитически) оценить такую погрешность. Более того, будучи незначительной на небольших промежутках времени, при плавании в течение нескольких суток по счислению такая погрешность может уже оказывать существенное влияние на точность даже несмотря на ее относительно малый вклад в суммарную погрешность, в появлении которой преобладающую роль играют, естественно, ошибки исходных данных. Как правило, последний аргумент является объяснением небольшого интереса со стороны исследователей к вопросам ошибок метода. Изучение погрешностей метода счисления необходимо также потому, что влияние ошибок происходит в общем случае совместно.

Метод счисления определяется во многом моделью используемой земной поверхности. Как правило, в качестве такой поверхности используется либо сфера, либо эллипсоид вращения (как это предложено, например, в работах [7], [8]). Особое значение изучение погрешностей метода имеет в том случае, когда требуется получить гарантированные интервальные оценки счислимых координат места судна. При выборе эллипсоида вращения в качестве геометрической модели счисления получается система дифференциальных уравнений. Решить данную систему точными методами невозможно, так как в левой части уравнения широты (как уравнения с разделяющимися переменными) имеется функция широты, первообразная которой не выражается через ее элементарные функции. Более того, в правой части уравнения северная составляющая абсолютной скорости не имеет вообще аналитического описания, а задается в виде последовательности, полученной по результатам дискретных измерений (т. е. таблично). Остается только вариант использования приближенных методов. Последние, в свою очередь, могут быть в своей основе либо численными, либо аналитическими.

Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений представлены двумя основными группами. К первой группе относятся методы Рунге – Кутты [9], [10]. Для оценки погрешностей данных методов необходимо знание производных искомой функции, начиная со второго порядка и выше. Точное значение оценок данных производных получить невоз-

можно (или они будут очень завышенными), поскольку искомая функция не задается аналитически. Пределы указанных производных могут быть оценены лишь на основе того или иного способа, степень адекватности которого невозможно установить. Даже для оценки погрешности простейшего метода Эйлера требуется оценить верхнюю границу модуля северной координаты вектора ускорения судна, что не так просто сделать, как для одноименной составляющей скорости. Оценить границы производных скорости более высокого порядка еще труднее. Вторую группу составляют разностные методы (формулы Адамса более употребительны). В их основе находится замена производной искомой функции некоторой интерполирующей функцией, которая выражается через элементарные функции и поэтому интегрируется точно. Действительный вид заменяемой функции неизвестен. Оценить степень ее отклонения от интерполирующей функции можно по значениям производных от заменяемой функции. Такие производные можно оценить лишь приближенно. Таким образом, основная проблема использования численных методов для интегрирования широтного уравнения счисления состоит в том, что точно оценить погрешность метода невозможно, так как нельзя точно определить промежутки возможных значений северной составляющей ускорения и ее производных.

В статье [11] предложен вариант приближенного аналитического решения широтного уравнения счисления, заключающегося в замене в правой части этого уравнения (для задачи Коши) трансцендентной функции постоянной, сохраняющей свое значение на промежутке времени плавания. Также была выведена формула, позволяющая определить верхнюю границу модуля ошибки, происходящей от такой замены. В настоящем исследовании изучается вопрос определения верхней границы модуля погрешности долготы судна, возникающей в результате указанной выше замены в уравнении широты.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Математическая формулировка задачи. Как отмечалось в статье [11], дифференциальные уравнения счисления координат судна, движущегося вдоль поверхности эллипсоида, могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{(a+h)(1-e^2)} \sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3} V_N(t); \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{1}{a+h} \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} V_E(t),\end{aligned}\quad (1)$$

где φ, λ — геодезическая широта и долгота центра тяжести судна соответственно; $V_N(t)$ и $V_E(t)$ — северная и восточная составляющие скорости судна относительно грунта, зависящие от времени t ; a — большая полуось эллипсоида, e — эксцентриситет меридиана, h — геодезическая высота центра тяжести судна, не зависящая от времени.

Уравнение счисления для широты φ не имеет точного решения, даже если функция $V_N(t)$ задается аналитически, так как выражение $\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}$ не имеет первообразной, представляемой в аналитическом виде. В статье [11] предлагается перейти от решения исходной задачи — точного решения первого уравнения в (1) — к решению другой задачи:

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \frac{q_{\max}}{(a+h)(1-e^2)} V_N(t), \quad (2)$$

где $q_{\max} = \sqrt{(1-e^2 \sin^2 (\min|\varphi|))^3}$; $\tilde{\varphi}$ — приближенное значение широты.

Абсолютная погрешность метода α_φ оценивается по формуле

$$|\alpha_\varphi| \leq \frac{1}{(a+h)(1-e^2)} \left(\sqrt{(1-e^2 \sin^2 (\min|\varphi|))^3} - \sqrt{(1-e^2 \sin^2 (\max|\varphi|))^3} \right) \cdot \max |V_N(t)| \cdot t. \quad (3)$$

Наибольшие и наименьшие значения в формулах (2) и (3) берутся за время плавания судна по счислению.

Уравнение счисления для долготы λ в соотношениях (1) содержит в правой части множитель $\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} / \cos \varphi$, зависящий от широты φ , вычисляемой по формуле (2) и имеющей ошибку

метода этой формулы α_φ . Иными словами, исходное долготное уравнение счисления заменяется уравнением, содержащим приближенное значение широты $\tilde{\varphi}$, вычисленное на основе решения уравнения (2):

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{dt} = \frac{1}{a+h} \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}}{\cos \tilde{\varphi}} V_E(t), \quad (4)$$

где $\tilde{\lambda}$ — приближенное значение долготы судна.

Найдем теперь одну из верхних границ модуля погрешности метода счисления долготы α_λ , возникающую вследствие перехода от исходного уравнения к уравнению (4).

Решение задачи. Перепишем данное соотношение в интегральном виде:

$$\tilde{\lambda}(t) = \lambda(0) + \frac{1}{a+h} \int_0^t \left[\frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}}{\cos \tilde{\varphi}} \right] V_E(t) dt. \quad (5)$$

Второе соотношение в (1) запишем в аналогичном виде:

$$\lambda(t) = \lambda(0) + \frac{1}{a+h} \int_0^t \left[\frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \right] V_E(t) dt. \quad (6)$$

Вычитая выражение (5) из выражения (6), получим ошибку метода α_λ :

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{a+h} \int_0^t \left[\frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}}{\cos \tilde{\varphi}} - \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \right] V_E(t) dt. \quad (7)$$

Введем обозначения: $f_\varphi := \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} / \cos \varphi$ и $\tilde{f}_\varphi := \sqrt{1-e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}} / \cos \tilde{\varphi}$, с учетом которых соотношение (7) запишется в следующем виде:

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{a+h} \int_0^t (\tilde{f}_\varphi - f_\varphi) V_E(t) dt.$$

Выражение для модуля α_λ имеет вид:

$$|\alpha_\lambda| = \frac{1}{a+h} \left| \int_0^t (\tilde{f}_\varphi - f_\varphi) V_E(t) dt \right|. \quad (8)$$

Как известно из курса анализа,

$$\left| \int_0^t (\tilde{f}_\varphi - f_\varphi) V_E(t) dt \right| \leq \int_0^t |(\tilde{f}_\varphi - f_\varphi) V_E(t)| dt \leq Ct, \quad (9)$$

где C — константа, удовлетворяющая условию $|(\tilde{f}_\varphi - f_\varphi) V_E(t)| \leq C$ для любого момента времени t .

Найдем сначала границы области неопределенности множителя $\tilde{f}_\varphi - f_\varphi$. Функция $f_\varphi = \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} / \cos \varphi$ имеет наименьшее значение (единица) при широте $\varphi = 0$. В промежутках от 0 до $\pm 90^\circ$ функция монотонно возрастает, устремляясь к бесконечности по мере приближения к полюсам. Более того, функция f_φ является четной. График данной функции для диапазона широт от 85°S до 85°N имеет следующий вид:

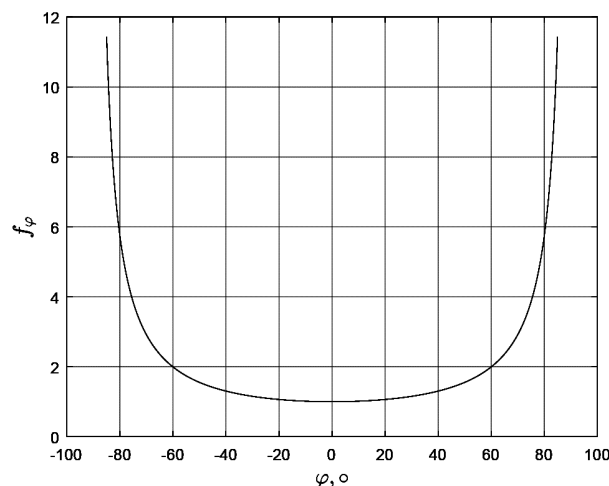


График зависимости величины f_φ от широты

Данный график помогает наглядно понять два случая, возникающих при оценке значений функции f_φ и подынтегрального выражения $\tilde{f}_\varphi - f_\varphi$ правой части (7). Случаи связаны с тем, что возможны два варианта расположения границ промежутка неопределенности широты $[\tilde{\varphi} - A_\varphi; \tilde{\varphi} + A_\varphi]$, где A_φ — верхняя граница модуля абсолютной погрешности метода счисления широты, равная правой части неравенства (3).

Первый случай наблюдается, когда границы промежутка неопределенности широты лежат по одну сторону от оси ординат (оси симметрии), включая саму ось. Иными словами, $\tilde{\varphi} - A_\varphi < \tilde{\varphi} + A_\varphi \leq 0$ или $0 \leq \tilde{\varphi} - A_\varphi < \tilde{\varphi} + A_\varphi$ или $(\tilde{\varphi} - A_\varphi) \cdot (\tilde{\varphi} + A_\varphi) \geq 0$.

Второй случай возникает, когда границы промежутка неопределенности широты лежат по разные стороны от оси ординат и имеют разные знаки, т. е. $\tilde{\varphi} - A_\varphi < 0$ и $\tilde{\varphi} + A_\varphi > 0$ или, что эквивалентно, $(\tilde{\varphi} - A_\varphi) \cdot (\tilde{\varphi} + A_\varphi) < 0$.

Для первого случая границы промежутка неопределенности функции f_φ определяются следующим неравенством:

$$\min[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)] \leq f_\varphi \leq \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)].$$

Выражение $\tilde{f}_\varphi - f_\varphi$ будет иметь следующую интервальную оценку:

$$\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)] \leq \tilde{f}_\varphi - f_\varphi \leq \tilde{f}_\varphi - \min[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)],$$

а его абсолютная величина

$$|\tilde{f}_\varphi - f_\varphi| \leq \max[|\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|, |\tilde{f}_\varphi - \min[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|].$$

Можно показать, что функция f_φ на интервале $(-90^\circ; 90^\circ)$ имеет положительную вторую производную. Это означает, что для любой пары промежутков $[\tilde{\varphi} - A_\varphi; \tilde{\varphi}]$ и $[\tilde{\varphi}; \tilde{\varphi} + A_\varphi]$, принадлежащей указанному ранее интервалу на одной полуоси, справедливо следующее утверждение: «Наименьший модуль производной $|df_\varphi/d\varphi|$ на одном из них больше чем наибольший на другом». Длина обоих промежутков (с закрытыми границами) одинакова и составляет A_φ . В соответствии с теоремой Лагранжа (о конечных приращениях), приращение функции на отрезке есть произведение его длины на производную в точке, принадлежащей отрезку, исключая его границы. Таким образом, на отрезке, где функция имеет большую (по модулю) производную, будет и большее (по модулю) приращение функции. В соответствии с этими рассуждениями можно сделать вывод о том, что $|\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]| > |\tilde{f}_\varphi - \min[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|$. Следовательно, переходим к следующему неравенству:

$$|\tilde{f}_\varphi - f_\varphi| \leq |\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|.$$

Умножая данное неравенство на величину $|V_E(t)|$, а также принимая во внимание, что $|\tilde{f}_\varphi - f_\varphi| \cdot |V_E(t)| = |(\tilde{f}_\varphi - f_\varphi)V_E(t)|$, получим:

$$|(\tilde{f}_\varphi - f_\varphi)V_E(t)| \leq |V_E(t)| \cdot |\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|;$$

$$|(\tilde{f}_\varphi - f_\varphi)V_E(t)| \leq \max |V_E(t)| \cdot |\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|,$$

где $\max |V_E(t)|$ — наибольшее значение модуля восточной составляющей скорости судна на промежутке времени $[0; t]$.

Для второго случая имеют место неравенства:

$$1 \leq f_\varphi \leq \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)];$$

$$\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)] \leq \tilde{f}_\varphi - f_\varphi \leq \tilde{f}_\varphi - 1;$$

$$|\tilde{f}_\varphi - f_\varphi| \leq \max[|\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|, \tilde{f}_\varphi - 1].$$

Второй случай предполагает, что приближенное значение широты $\tilde{\varphi}$ может быть равно или не равно нулю. Для второго варианта получается, что $\tilde{\varphi}$ и $(\tilde{\varphi} - A_\varphi)$ или $(\tilde{\varphi} + A_\varphi)$ лежат на одной полуоси ($\tilde{\varphi} < 0$ или $\tilde{\varphi} > 0$), т. е. либо интервал $[\tilde{\varphi} - A_\varphi; \tilde{\varphi}] \cup (\tilde{\varphi}; 0]$, либо интервал $[0; \tilde{\varphi}] \cup (\tilde{\varphi}; \tilde{\varphi} + A_\varphi]$

принадлежит одной полуоси. На основе теоремы Лагранжа (о конечных приращениях) можно записать:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]| &= A_\varphi \cdot |f'_\varphi(\varphi_1)|; \\ \tilde{f}_\varphi - 1 &= \begin{cases} \tilde{\varphi} \cdot |f'_\varphi(\varphi_{II})|, & \text{если } \tilde{\varphi} > 0; \\ -\tilde{\varphi} \cdot |f'_\varphi(\varphi_{II})|, & \text{если } \tilde{\varphi} < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

где φ_1 обозначает некоторую точку из промежутка $(\tilde{\varphi} - A_\varphi; \tilde{\varphi})$ или $(\tilde{\varphi}; \tilde{\varphi} + A_\varphi)$, φ_{II} — точку из промежутка $(\tilde{\varphi}; 0)$ или $(0; \tilde{\varphi})$.

Как отмечалось ранее, вторая производная функции f_φ положительна на всем рабочем диапазоне широт, кроме окрестностей полюсов. f'' — нечетная функция (будет показано далее). Следовательно, $|df_\varphi/d\varphi|$ монотонно убывает при движении от полюсов к экватору. Это означает, что для двух непересекающихся промежутков модуль первой производной будет больше в любой точке промежутка, находящегося ближе к полюсу, чем в любой точке промежутка, находящегося ближе к экватору. Иными словами, $|f'_\varphi(\varphi_1)| > |f'_\varphi(\varphi_{II})|$. На основе соотношений (10) можно сделать вывод о том, что $|\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]| > \tilde{f}_\varphi - 1$, если $\tilde{\varphi} \leq A_\varphi$ или $-\tilde{\varphi} \leq A_\varphi$. Последние два неравенства выполняются, так как второй случай предполагает выполнение $(\tilde{\varphi} - A_\varphi) \cdot (\tilde{\varphi} + A_\varphi) < 0$ или (что то же самое) $\tilde{\varphi}^2 < A_\varphi^2$. Анализируя график квадратичной функции, приходим к выводу, что последнее неравенство означает выполнение следующих неравенств: $\tilde{\varphi} < A_\varphi$ или $-\tilde{\varphi} < A_\varphi$.

Если $\tilde{\varphi} = 0$, то неравенство $|\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]| > \tilde{f}_\varphi(0) - 1 = 0$ также выполняется.

Таким образом, получаем следующее неравенство:

$$|\tilde{f}_\varphi - f_\varphi| \leq |\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|.$$

Продолжая цепочку рассуждений по аналогии с первым случаем, получаем неравенства:

$$\begin{aligned} |(\tilde{f}_\varphi - f_\varphi)V_E(t)| &\leq |V_E(t)| \cdot |\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|; \\ |(\tilde{f}_\varphi - f_\varphi)V_E(t)| &\leq \max|V_E(t)| \cdot |\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|. \end{aligned}$$

Как видно, для обоих случаев результат получился один и тот же. Выражение, стоящее в правой части данного неравенства, хоть и ограничивает модуль подынтегральной функции, однако не может играть роль константы C в соотношении (9). Причина заключается в том, что величина $|\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]|$ зависит от времени на промежутке $[0; t]$. Возникает задача поиска верхней границы данной величины. В соответствии с теоремой Лагранжа (о конечных приращениях) запишем

$$|\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]| = A_\varphi \cdot |f'_\varphi(\varphi_*)|,$$

где φ_* — некоторая точка из промежутка $[\tilde{\varphi} - A_\varphi; \tilde{\varphi}]$ или $[\tilde{\varphi}; \tilde{\varphi} + A_\varphi]$.

Производная функции f_φ определяется следующим выражением:

$$f'_\varphi = \frac{(1 - e^2) \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos^2 \varphi}.$$

Для абсолютной величины будут справедливы соотношения:

$$|f'_\varphi| = \frac{(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos^2 \varphi} \cdot |\sin \varphi| \leq \frac{(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 (\max |\varphi|)} \cdot \cos^2 (\max |\varphi|)} \cdot \sin (\max |\varphi|),$$

где $\max |\varphi| < 90^\circ$ — наибольшее значение модуля широты судна на промежутке времени плавания $[0; t]$.

Получается, что

$$|\tilde{f}_\varphi - \max[f_\varphi(\tilde{\varphi} - A_\varphi), f_\varphi(\tilde{\varphi} + A_\varphi)]| \leq A_\varphi \cdot \frac{(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 (\max |\varphi|)} \cdot \cos^2 (\max |\varphi|)} \cdot \sin (\max |\varphi|).$$

Окончательная оценка для модуля подынтегрального выражения имеет вид:

$$|(\tilde{f}_\varphi - f_\varphi)V_E(t)| \leq \max |V_E(t)| \cdot A_\varphi \frac{(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2(\max|\varphi|)} \cdot \cos^2(\max|\varphi|)} \cdot \sin(\max|\varphi|).$$

Таким образом, константа C в выражении (9) найдена.

Результаты (Results)

Продолжая рассуждения на основе соотношений (8) и (9), получим верхнюю границу A_λ модуля абсолютной погрешности метода $|\alpha_\lambda|$, возникающей вследствие предположения (сделанного на этапе расчета широты) о том, что $\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3} \equiv \sqrt{(1-e^2 \sin^2(\min|\varphi|))^3}$:

$$|\alpha_\lambda| \leq A_\lambda = A_\varphi \cdot \frac{(1-e^2)}{a+h} \cdot \frac{\sin(\max|\varphi|)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2(\max|\varphi|)} \cdot \cos^2(\max|\varphi|)} \cdot \max |V_E(t)| \cdot t, \quad (11)$$

где $\max|\varphi| < 90^\circ$; A_φ — верхняя граница модуля абсолютной погрешности метода счисления широты судна $|\alpha_\varphi|$, определяемая в соответствии с выражением (3).

Выполним расчеты по формуле (11) для судов, имеющих различную наибольшую скорость хода, которые движутся на поверхности эллипсоида WGS-84 ($a = 6378137$ м, $e^2 = 2a - a^2 = 2(1/298,257223563) - (1/298,257223563)^2 \approx 0,006694379990141$) в течение периода плавания различной продолжительности. Предполагается, что движение происходит на поверхности эллипсоида ($h = 0$), $\min|\varphi| = 0$, $\max|\varphi| = 85^\circ$, $\max |V_N(t)| = \max |V_E(t)|$. Расчеты выполнены с использованием среды MATLAB R2015b на 64-битовой операционной системе. Результаты сведены в следующую таблицу:

Верхняя граница модуля методической ошибки определения долготы судна A_λ
(в угловых минутах (') или градусах (°))

Тип судна	Наибольшая скорость $\max V_E(t) $, уз	Время плавания, ч, сут					
		1 ч	4 ч	1 сут	7 сут	14 сут	28 сут
Суда, занятые буксировкой и другими подобными работами	10	0,04'	0,6'	21,9'	17,8°	71,4°	285,6°
Сухогрузы универсальные	15	0,1'	1,4'	49,2'	40,2°	160,6°	> 360°
Контейнеровозы, паромы, пассажирские суда	25	0,2'	3,8'	2,3°	111,6°	> 360°	> 360°
Атомные крейсера	35	0,5'	7,4'	4,5°	218,6°	> 360°	> 360°
Суда на воздушной подушке	60	1,4'	21,9'	13,1°	> 360°	> 360°	> 360°
Экранопланы	300	34,1'	9,1°	327,8°	> 360°	> 360°	> 360°

Обсуждение результатов (Discussion of Results)

Расчеты показали, что, следуя на универсальном сухогрузе вдоль меридиана со скоростью 15 уз в течение четырехчасовой вахты, можно получить погрешность в определении долготы, не превосходящую по абсолютному значению 1,4', если в выражениях (3) и (11) примем $\min|\varphi| = 0^\circ$, $\max|\varphi| = 85^\circ$. В отличие от формулы (3), где диапазон широт ничем не ограничен, формула оценки погрешности долготы требует, чтобы $\max|\varphi| < 90^\circ$. При этом, конечно, нет возможности точно указать, какую наибольшую по модулю широту можно брать. Теоретическое решение данного вопроса возможно, очевидно, с учетом информации об ошибках округления в ЭВМ. На практике можно исходить либо из района плавания судна, либо из приемлемости полученной верхней границы погрешности. Например, если для скорости 25 уз оценивать погрешность при $\max|\varphi| = 85^\circ$, то ошибка не превосходит 0,2' за 1 ч (см. таблицу). Установка $\max|\varphi| = 89^\circ$ приводит к оценке погрешности, равной 6' за час.

Формулы (3) и (11) можно использовать в указанной далее последовательности. Сначала с использованием формулы (3) и соотношения, приведенного в [11] определить диапазон широт, в ко-

тором происходит плавание судна, и верхнюю границу диапазона $\max |\varphi|$ уже использовать в формуле (11). При этом, конечно, предполагается, что производная широты по времени (или, что то же самое, северная составляющая абсолютной скорости) не меняет свой знак в течение плавания. Примером такого плавания может служить движение судна постоянными курсом и скоростью при постоянных ветре и течении.

На основе формулы (11) можно сделать интересный вывод: если подставить в формулу правую часть соотношения (3), видно, что погрешность метода определения долготы зависит от времени как квадратичная функция. При этом коэффициент при квадрате времени определяется параметрами эллипсоида, на котором происходит счисление пути, а также ограничениями по широте района плавания и по максимальной скорости движения. Погрешность метода широты (в соответствии с соотношением (3)) зависит от времени линейно. Получается, что погрешность широты, линейно зависящая от времени, порождает погрешность долготы, зависящую уже от квадрата времени.

Заключение (Conclusion)

В результате проведенного исследования получено приближенное решение дифференциального уравнения счисления геодезической долготы судна, движущегося на постоянной высоте над поверхностью общеземного эллипсоида, а также верхняя граница модуля погрешности метода такого решения. Погрешность возникает вследствие замены широты в правой части уравнения приближенным значением, которое, в свою очередь, получается также в результате приближенного решения соответствующего уравнения широты. Выполнены расчеты верхней границы модуля погрешности приближенного решения. При расчетах использовались различные значения максимального модуля восточной составляющей скорости судна для различной длительности плавания с использованием параметров эллипсоида WGS-84.

Важным свойством предлагаемого метода приближенного решения уравнения долготы является возможность получения оценки погрешности такого метода. Причем для расчета верхней границы модуля погрешности не требуется знаний о предельных значениях ускорения судна, производной ускорения и других подобных трудно поддающихся интервальной оценке величин. Единственный кинематический параметр, который используется для расчета, это наибольшее значение модуля восточной составляющей абсолютной скорости судна на промежутке времени плавания.

Формула, выведенная для оценки погрешности метода счисления долготы, использует верхнюю границу модуля погрешности метода счисления широты, формула для вычисления которой была получена ранее. Это позволяет утверждать о возможности оценки точности предлагаемого метода счисления координат судна (или другого объекта), движущегося на поверхности эллипсоида (точнее, с постоянной высотой над его поверхностью). Однако пока оценки даются на основе вычислений, выполненных по формулам, точность которых (вычислений) не оценивается никаким образом. Указанное обстоятельство в настоящее время сильно ограничивает возможности практической реализации предложенных алгоритмов. Поэтому дальнейшие усилия должны сосредоточиться на разработке методов гарантированных интервальных оценок погрешностей округления, возникающих в ходе расчетов на ЭВМ ошибок метода по предложенным формулам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев Б. Н.* Анализ свойств показателей точности счисления пути и некоторые практические выводы / Б. Н. Беляев // Записки по гидрографии. — 1996. — № 230. — С. 20–28.
2. *Михальский В. А.* К вопросу о решении задачи оценивания точности счисления / В. А. Михальский // Пятая российская научно-техническая конференция «Современное состояние и проблемы навигации и океанографии (НО-2004)». — СПб.: ГНИНГИ МО РФ, 2004. — С. 77–81.
3. *Михальский В. А.* Метрология в кораблевождении и решение задач навигации / В. А. Михальский, В. А. Катенин. — СПб.: Элмор, 2009. — 288 с.
4. *Карасев В. В.* Обоснование требований к повышению точности измерения скорости корабля и точности счисления / В. В. Карасев, С. А. Верещагин, В. Н. Колomoец // Научные труды Дальневосточного государственного технического рыбохозяйственного университета. — 2009. — № 21. — С. 91–97.

5. Болховитинов В. К. Счисляемое местоположение подводного робота / В. К. Болховитинов // Системы управления и обработки информации. — 2015. — № 30. — С. 26–37.
6. Дерябин В. В. Оценка точности нейросетевой системы счисления пути судна / В. В. Дерябин // Транспорт Российской Федерации. — 2015. — № 4 (59). — С. 40–43.
7. Каврайский А. В. Алгоритмы точного решения прямой и обратной навигационных задач / В. А. Каврайский // Навигация и гидрография. — 2002. — № 14. — С. 126–136.
8. Пантелеев Н. Ф. Счисление геодезических координат B , L , h для объектов, движущихся по поверхности Земли / Н. Ф. Пантелеев, В. В. Кузнецов, А. Г. Глазков, А. А. Власова // Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления. — 2010. — № 1. — С. 69–72.
9. Banachowicz A. A comparison of numerical solutions of dead reckoning navigation/ A. Banachowicz, A. Wolski // Reports on Geodesy. — 2012. — Vol. 2/93. — Pp. 49–55.
10. Wensveen P. J. A path reconstruction method integrating dead-reckoning and position fixes applied to humpback whales / P. J. Wensveen, L. Thomas, P. J. O. Miller // Movement ecology. — 2015. — Vol. 3. — Is. 1. — Pp. 31. DOI: 10.1186/s40462-015-0061-6.
11. Дерябин В. В. Оценка погрешности метода счисления широты судна / В. В. Дерябин // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2017. — Т. 9. — № 6. — С. 1159–1167. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-6-1159-1167.

REFERENCES

1. Belyaev, B.N. “Analiz svoistv pokazateley tochnosti schisleniya put i nekotorye prakticheskie vivody.” *Zapiski po gidrographii* 230 (1996): 20–28.
2. Mikhalskiy, V. A. “K voprosu o reshenii zadachi otsenivaniya tochnosti schisleniya.” *Pyataya rossiiskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Sovremennoe sostoyanie i problemy navigatsii i okeanografii (NO-2004)»*. SPb.: GNINGI MO RF, 2004. 77–81.
3. Mikhalskiy, V. A., and V. A. Katenin. *Metrologiya v korablevozhdenii i reshenie zadach navigatsii*. SPb.: Elmor, 2009.
4. Karasev, V. V., S. A. Vereschagin, and V. N. Kolomoets. “Obosnovanie trebovaniy k povysheniyu tochnosti izmereniya skorosti korablya i tochnosti schisleniya.” *Nauchnye trudy dal'nevostochnogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo rybokhozyaistvennogo universiteta* 21 (2009): 91–97.
5. Bolkhovitinov, V. K. “Schislyаемое mestopolozhenie podvodnogo robota.” *Control and information processing systems* 30 (2015): 26–37.
6. Deryabin, V. V. “Precision assessment of neural network-based vessel’s dead reckoning system.” *Transport of the Russian Federation* 4(59) (2015): 40–43.
7. Kavraisky, A. V. “Algorithms for Precise Solution of the Direct and Inverse Navigation Problems.” *Navigation and hydrography* 14 (2002): 126–136.
8. Panteleev, N. F. “Schislenie geodezicheskikh koordinat B , L , h dlya ob»ektov, dvizhushchikhsya po poverkhnosti Zemli.” *Trudy FGUP NPTsAP. Sistemy i pribory upravleniya* 1 (2010): 69–72.
9. Banachowicz, Andrzej, and Adam Wolski. “A comparison of numerical solutions of dead reckoning navigation.” *Reports on Geodesy* 2/93 (2012): 49–55.
10. Wensveen, Paul J., Len Thomas, and Patrick JO Miller. “A path reconstruction method integrating dead-reckoning and position fixes applied to humpback whales.” *Movement ecology* 3.1 (2015): 31. DOI: 10.1186/s40462-015-0061-6.
11. Deryabin, Victor V. “Assessment of a method error of dead reckoning of a vessel’s latitude.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 9.6 (2017): 1159–1167. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-6-1159-1167.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Дерябин Виктор Владимирович —
кандидат технических наук
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: gmavitder@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Deryabin, Victor V. —
PhD
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg 198035,
Russian Federation
e-mail: gmavitder@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 23 апреля 2019 г.

Received: April 23, 2019.