DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639

MODIFICATION OF THE LEAST SQUARES METHOD FOR SPLINE APPROXIMATION OF NAVIGATIONAL ISOSURFACE

I. V. Yuyukin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

For the first time, the formalization of the least squares method is presented as matrix calculation with the purpose of optimal approximation of the navigational isosurface as the geometric image of navigational isolines concentration in the context of modern understanding of the navigational field concept. The task topicality is specified by the necessity to search a new decision for parallelization of blocky matrix transformations organizing in the navigation practice due to the measurements superfluity as the result of doubling the ship's position definition by the alternative methods. The pragmatic estimation of the classic mathematical apparatus doesn't exclude the possibility of the negative problem manifestation of looping a computer program realizing the standard least squares method. In the existing mathematical approach there is no algorithmic ability of adaptation to the potential resource of the multiprocessor computer equipment. The computational stability of new method is determined by the ability to repeatedly use the computational module in the algorithm to solve an ultra-large system of linear algebraic equations using symmetric techniques with cellular matrices. The visual geometrical interpretation of the hybrid interpolation technology of a hypothetical fragment of the navigational isosurface in 3D projection is presented. The intuitive selection of the controlled smoothing parameter in an interactive mode for choosing between interpolation and approximation depending on the navigational measurements accuracy is realized.

The study of searching an optimization scheme for organizing grid nodes acquires an independent mathematical interest. The issue of high-speed information handling on the base of modified formula at its realization in the onboard computer to ensure the navigator's adequate analysis the incoming data flow, the proper variation of the watch staff and avoiding the crew fatigue, as well as assistance in the correct decision making regarding ship management, is examined. When applying the formula derived in the proposed study, a double effect is achieved simultaneously: improving the final results accuracy and organizing the effective calculations by optimizing the computational costs.

Keywords: least squares method, navigational isosurface, concept of navigational field, parallelization of matrix transformations, hybrid technology of interpolation, controlled smoothing parameter, interactive mode, optimization of grid nodes, the high-speed information handling, variation of the watch staff.

For citation:
Yuyukin, Igor V. “Modification of the least squares method for spline approximation of navigational isosurface.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.4 (2019): 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.

УДК 656.61.052 656

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ НАВИГАЦИОННОЙ ИЗОПОВЕРХНОСТИ

И. В. Ююкин

ФГБОУВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Впервые представлена формализация метода наименьших квадратов с целью оптимальной аппроксимации навигационной изоповерхности как геометрического образа концентрации навигационных изолиний в контексте современного понимания концепции навигационного пространства. Актуальность задачи обусловлена необходимостью поиска нового решения по распараллеливанию блочных матричных преобразований, организующихся в практике судовождения ввиду избыточности измерений как результата дублирования определения места судна альтернативными методами. Отмечается, что прагматическая оценка *классического математического аппарата не исключает возможности проявления негативной проблемы зацикливания компьютерной программы, реализующей стандартный метод наименьших квадратов. В существующем математическом подходе отсутствует алгоритмическая возможность адаптации под потенциальный ресурс многопроцессорной компьютерной техники. Подчеркивается, что вычислительная устойчивость нового способа определяется возможностью многократного использования в алгоритме расчетного модуля для решения сверхбольшой системы линейных алгебраических уравнений за счет техники симметричного оперирования с клеточными матрицами. Представлена наглядная геометрическая интерпретация гибридной технологии интерполяции гипотетического фрагмента навигационной изоповерхности в 3D проекции. Реализуется интуитивный подбор в интерактивном режиме управляемого параметра сглаживания для выбора между интерполяцией или аппроксимацией в зависимости от точности навигационных измерений. При этом исследование проблемы поиска оптимизационной схемы организации сеточных узлов приобретает самостоятельный математический интерес. Рассматривается вопрос высокоскоростной обработки навигационной информации на основе модифицированной формулы при ее реализации в бортовом компьютере для обеспечения адекватного анализа судоводителем поступающего потока данных, корректного варьирования составом вахты и устранения избыточной усталости экипажа, а также содействия принятию правильного решения в отношении грамотного управления судном. При применении выведенной в предлагаемом исследовании формулы достигается одновременно двойной эффект: повышение точности конечных результатов и организация эффективных вычислений за счет оптимизации вычислительных затрат.*

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, навигационная изоповерхность, концепция навигационного пространства, распараллеливание матричных преобразований, гибридная технология интерполяции, управляемый параметр сглаживания, интерактивный режим, оптимизация сеточных узлов, высокоскоростная обработка информации, варьирование состава вахты.

Для цитирования:
Ююкин И. В. Модификация метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации навигационной изоповерхности/ И.В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 4. — С. 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.

Введение (Introduction)

Числовое поле навигационных параметров в общем виде формализуется уравнением $U = f(\varphi, \lambda)$, определяющим последовательность физических точек, в каждой из которых навигационная функция принимает измеренное значение. Для корректировки пространственно-временного местоположения морского подвижного объекта судоводителем выполняются технические измерения навигационных параметров, при этом результаты измерений составляют по совокупности навигационное поле параметров. Скалярное поле навигационных параметров фактически организуется за счет избыточности измерений для повышения надежности определения места судна. Избыточность формируется при обеспечении дублирования технических измерений альтернативными методами.

Функциональная зависимость $U = f(\varphi, \lambda)$ соотносится с координатами всего многообразия точек скалярного поля и может быть использована в качестве обратной связи для математического вычисления значения любого навигационного параметра в произвольных координатах при известной функциональной зависимости. Навигационное пространство понимается трехмерным, и навигационная изоповерхность при этом играет лидирующую роль как геометрический образ концентрации навигационных изолиний. Навигационную изоповерхность можно трактовать как поверхность точек равных значений навигационных параметров в объеме навигационного пространства.

Поиск вероятнейшего решения эффективно может быть реализован на основе *метода наименьших квадратов* (МНК). При анализе современного состояния теории математических основ судовождения необходимо отметить, что позиционируется исключительно классическая формула МНК в матричном исчислении:

$$\Delta \hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T \Delta U, \qquad (1)$$

где ^ — оптимальность решения по МНК;

ΔX — вектор искомых неизвестных;

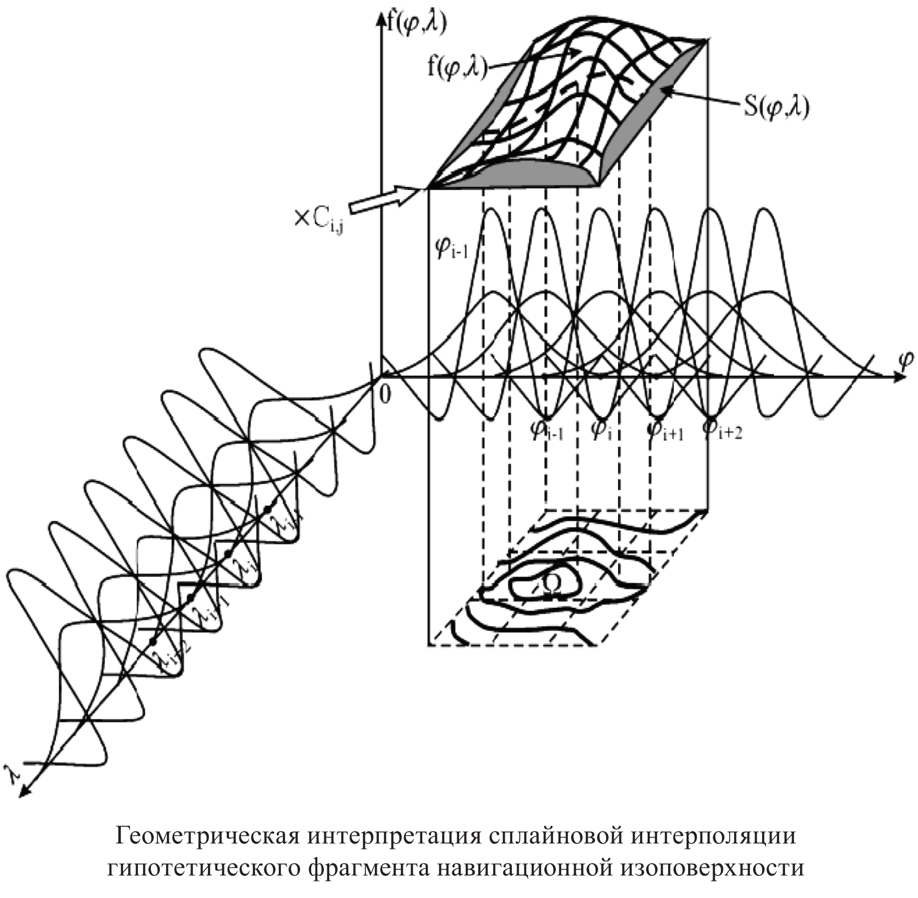
A — матрица коэффициентов линий положения;

ΔU — вектор измерений навигационных параметров.

Классический подход позволяет найти адекватное решение. Ситуация кардинально меняется в случае наличия сложного избыточного массива измерений, формирующего навигационную изоповерхность как геометрическую интерпретацию скалярного поля навигационных параметров. Для достижения эффективной способности алгоритма многократно использовать расчетный модуль при решении больших систем линейных алгебраических уравнений актуальной становится задача модификации метода наименьших квадратов МНК с целью оптимальной организации вычислительной процедуры аппроксимации навигационной изоповерхности базисными сплайнами. Использование феномена финитности *B*-сплайнов в практических приложениях позволяет, ввиду наличия алгоритмической возможности, выполнять компактно сжатие числового массива измерительных данных [1]–[3].

Методы и материалы (Methods and Materials)

Геометрическая интерпретация интерполяции фрагмента гипотетической навигационной изоповерхности показана на рисунке. Восстановление выпуклой оболочки математически реализуется за счет умножения узловых значений базисных финитных функций и сплайновых аналогов Лагранжа на искомые по МНК скалярные коэффициенты при финальном суммировании полученных компонент на каждом выбранном сеточном полигоне.



Геометрическая интерпретация сплайновой интерполяции
гипотетического фрагмента навигационной изоповерхности

Система уравнений синтезирования навигационной изоповерхности в блочно-матричной форме по общей аналогии с формулой (1) формально может быть представлена следующим образом:

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ \frac{1}{\sqrt{p}}E_1 & H_2 \\ E_2 & \frac{1}{\sqrt{p}}H_1 \\ \frac{1}{\sqrt{p}}H_1 & \frac{1}{\sqrt{p}}H_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} C_{-k,-m} & C_{-k+1,-m} & \ldots & C_{g,-m} \\ C_{-k,-m+1} & C_{-k+1,-m+1} & \ldots & C_{g,-m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{-k,h} & C_{-k+1,h} & \ldots & C_{g,h} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{2,1} & \ldots & F_{Z_1,1} \\ F_{1,2} & F_{2,2} & \ldots & F_{Z_1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{1,Z_2} & F_{2,Z_2} & \ldots & F_{Z_1,Z_2} \end{bmatrix}$$

Клетки блочных матриц E_1, E_2 и H_1, H_2, соответственно, организуются коэффициентами $B_{g,k+1}(\varphi_q)$, $B_{h,m+1}(\lambda_r)$ и $L_{g,k+1}(\varphi_q)$, $L_{h,m+1}(\lambda_r)$:

$$E_1 = \begin{bmatrix} B_{-k,k+1}(\varphi_1) & \ldots & B_{g,k+1}(\varphi_1) \\ B_{-k,k+1}(\varphi_2) & \ldots & B_{g,k+1}(\varphi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{-k,k+1}(\varphi_q) & \ldots & B_{g,k+1}(\varphi_q) \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} B_{-m,m+1}(\lambda_1) & \ldots & B_{h,m+1}(\lambda_1) \\ B_{-m,m+1}(\lambda_2) & \ldots & B_{h,m+1}(\lambda_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{-m,m+1}(\lambda_r) & \ldots & B_{h,m+1}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} L_{-k,k+1}(\varphi_1) & \ldots & L_{g,k+1}(\varphi_1) \\ L_{-k,k+1}(\varphi_2) & \ldots & L_{g,k+1}(\varphi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{-k,k+1}(\varphi_q) & \ldots & L_{g,k+1}(\varphi_q) \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} L_{-m,m+1}(\lambda_1) & \ldots & L_{h,m+1}(\lambda_1) \\ L_{-m,m+1}(\lambda_2) & \ldots & L_{h,m+1}(\lambda_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{-m,m+1}(\lambda_r) & \ldots & L_{h,m+1}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

Сдвигом строк клеточных матриц Q_1 и Q_2 можно реализовать ленточные версии данных матриц. Техника оперирования с блочными матрицами производится по аналогичным правилам, как и в случае, когда вместо блоков задействуются простые числовые элементы традиционной матрицы при условии соблюдения размерностей блоков. Клеточную матрицу коэффициентов сформируем в виде произведения двух квазидиагональных матриц Q_1 и Q_2:

$$(Q_1 \times Q_2) \times C = F.$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ \frac{1}{\sqrt{p}}E_1 \\ E_2 \\ \frac{1}{\sqrt{p}}H_1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} E_2 \\ H_2 \\ \frac{1}{\sqrt{p}}H_1 \\ \frac{1}{\sqrt{p}}H_2 \end{bmatrix} \quad Q_1^T = \begin{bmatrix} E_1^T \\ \frac{1}{\sqrt{p}}E_1^T \\ E_2^T \\ \frac{1}{\sqrt{p}}H_1^T \end{bmatrix} \quad Q_2^T = \begin{bmatrix} E_2^T \\ H_2^T \\ \frac{1}{\sqrt{p}}H_1^T \\ \frac{1}{\sqrt{p}}H_2^T \end{bmatrix}$$

Для решения матричной системы (2) в качестве основы используется классическое представление (1), в дальнейшем модифицированное с учетом специфики сплайновой изогеометрии:

$$C = ((Q_1 \times Q_2)^T (Q_1 \times Q_2))^{-1} (Q_1 \times Q_2)^T \times F. \tag{3}$$

Рассмотрим отдельно компоненту

$$((Q_1 \times Q_2)^T (Q_1 \times Q_2))^{-1}.$$

По правилам матричного исчисления преобразуем данное выражение к альтернативному виду:

$$(Q_2^T \times Q_1^T \times Q_1 \times Q_2)^{-1} = (Q_2^T \times Q_1 \times Q_1^T \times Q_2)^{-1}. \tag{4}$$

Введем дополнительные матрицы G_1 и G_2:

$$G_1 = Q_2^T \times Q_1 = \begin{bmatrix} E_2^T \times E_1 \\ H_2^T \times \frac{1}{\sqrt{p}} E_1 \\ \frac{1}{\sqrt{p}} H_1^T \times E_2 \\ \frac{1}{\sqrt{p}} H_2^T \times \frac{1}{\sqrt{p}} H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2^T \times E_1 \\ H_2^T \times \frac{1}{\sqrt{p}} E_1 \\ \frac{1}{\sqrt{p}} H_1^T \times E_2 \\ \frac{1}{p} H_2^T \times H_1 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = Q_1^T \times Q_2 = \begin{bmatrix} E_1^T \times E_2 \\ \frac{1}{\sqrt{p}} E_1^T \times H_2 \\ E_2^T \times \frac{1}{\sqrt{p}} H_1 \\ \frac{1}{\sqrt{p}} H_1^T \times \frac{1}{\sqrt{p}} H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^T \times E_2 \\ \frac{1}{\sqrt{p}} E_1^T \times H_2 \\ E_2^T \times \frac{1}{\sqrt{p}} H_1 \\ \frac{1}{p} H_1^T \times H_2 \end{bmatrix}.$$

Клеточные матрицы G_1 и G_2 можно рассматривать также как прямые суммы:

$$G_1 = E_2^T \times E_1 \oplus \frac{1}{\sqrt{p}} H_2^T \times E_1 \oplus \frac{1}{\sqrt{p}} H_1^T \times E_2 \oplus \frac{1}{p} H_2^T \times H_1;$$

$$G_2 = E_1^T \times E_2 \oplus \frac{1}{\sqrt{p}} E_1^T \times H_2 \oplus \frac{1}{\sqrt{p}} E_2^T \times H_1 \oplus \frac{1}{p} H_1^T \times H_2.$$

Преобразуем выражение (4) на основе использования сформированных матриц G_1 и G_2:

$$((Q_2^T \times Q_1) \times (Q_1^T \times Q_2))^{-1} = (G_1 \times G_2)^{-1} = (G_2)^{-1} \times (G_1)^{-1}.$$

Выполним подстановку матриц G_1 и G_2 в выражение (3):

$$C = (G_2)^{-1} \times (G_1)^{-1} \times Q_2^T \times Q_1^T \times F = (G_2)^{-1} \times Q_2^T \times (G_1)^{-1} \times Q_1^T \times F. \tag{5}$$

Внесем под операцию транспонирования множитель $(G_1)^{-1} \times Q_1^T$, используя результат действия двойного транспонирования:

$$(((G_1)^{-1})^T)^T = (G_1)^{-1}.$$

В этом случае выражение (5) преобразуется следующим образом:

$$C = (G_2)^{-1} \times Q_2^T \times Q_1 \times (((G_1)^{-1})^T)^T \times F. \tag{6}$$

Свойство коммутативности применительно к третьему–пятому множителю выражения (6) дает композиционное представление:

$$Q_1 \times (((G_1)^{-1})^T)^T \times F = F^T \times Q_1 \times ((G_1)^{-1})^T.$$

Результат исследуемой перестановочности позволяет преобразовать выражение (6) к симметричному виду:

$$C = (G_2)^{-1} \times Q_2^T \times F^T \times Q_1 \times ((G_1)^{-1})^T.$$

При использовании тождества $((G_1)^{-1})^T = ((G_1)^T)^{-1}$ получим в конечном виде модифицированную формулу МНК с симметричным распараллеливанием перемножения блочных матриц:

$$C = (G_2)^{-1} \times Q_2^T \times F^T \times Q_1 \times ((G_1)^T)^{-1}. \tag{7}$$

Аналог МНК в модифицированном представлении позволяет организовать устойчивую в вычислительном смысле расчетную процедуру за счет реализации стратегии распараллеливания вычислительных операций в контексте облачной технологии [4], [5].

Результаты (Results)

При практическом применении *B*-сплайна, обеспечивающего максимальную точность приближения навигационной изоповерхности, необходимо выполнение дополнительного функционала по МНК:

$$\sum_{q=1}^{g}\sum_{r=1}^{h}\left[F_{q,r} - \sum_{i=-k}^{g+k+1}\sum_{j=-m}^{h+m+1} B_{i,k}(\varphi_q) B_{j,m}(\lambda_r) C_{i,j}\right]^2 \le S.$$

Оптимальный выбор параметра сглаживания S позволяет наилучшим образом решать проблему сглаживания результатов измерений в условиях отсутствия точных сведений о характере навигационной изоповерхности. Прерогативой пользователя является задание значений S в интерактивном режиме, что создает возможность построить *B*-сплайн, достаточно точно синтезирующий выпуклую оболочку. Профессор Карл де Бор проиллюстрировал яркой метафорой оптимальный подбор управляющего коэффициента, образно сравнив его с абстрактным ключом, после удачного поворота которого можно получить удовлетворительную аппроксимацию данных.

Практически использование S необходимо для нивелирования случайных погрешностей измерений. По сути, параметр S представляет наилучший эмпирический компромисс между интерполяцией и аппроксимацией в зависимости от точности результатов измерений навигационных параметров. Если располагают точной измерительной информацией, то применяется интерполяция $S = 0$, и базисные сплайны играют ведущую роль. Если известны только приближенные данные о навигационной функции или в измерениях присутствует погрешность, то при S — const реализуется аппроксимация. Варьирование параметром сглаживания S позволяет решать задачу аппроксимации навигационных изоповерхностей любой степени сложности.

Оптимальный подбор параметра сглаживания удобно осуществлять в интерактивном режиме [6] за экраном графического дисплея. Разработанная математическая модель является чрезвычайно гибкой конструкцией, позволяющей осуществить интуитивный выбор параметра сглаживания. Компьютерный диалог с пользователем позволяет достигнуть точной аппроксимации навигационной изоповерхности за счет возможности априорного задания параметра S с визуальной оценкой конечного результата.

Решения на основе оптимизированного алгоритма аппроксимации навигационной изоповерхности на основе базисных финитных и сплайнов лагранжевого типа представляют наилучший компромисс в теории приближения функций между полиномиальной и сплайн-аппроксимацией. Если весовой коэффициент $p \to \infty$, то прерогатива восстановления изоповерхности отводится *B*-сплайнам, а при $p \to 0$ второе–четвертое уравнения гибридной модели [7] аппроксимации навигационной изоповерхности определяют превосходство кусочных полиномов Лагранжа. В конкретной ситуации практического применения предлагаемого в настоящей работе метода нивелируются ограничения конкурирующих математических методов и максимальным образом используются преимущества каждого подхода.

Модифицированная формула МНК (7) с симметричным клеточным матричным распределением фактически является математической декомпозицией алгоритма синтеза навигационной изоповерхности, что позволяет равномерно распараллелить вычисления на многопроцессорной технике и проводить серии вычислительных экспериментов с многоточечным набором сеточных узлов в течение обозримого компьютерного времени.

Обсуждение (Discussion)

Теоретической предпосылкой развития методов сплайн-функций в практических приложениях послужила знаменитая теорема Вейерштрасса, утверждающая возможность сколь угодно точного приближения непрерывной функции многочленами путем оптимального подбора их степени и коэффициентов [8]. Теорема только утверждает, что многочлен, приближающий функцию с заданной точностью, существует, но при этом отсутствует информация о том, как его построить. Необходимо учитывать тот факт, что увеличение степени интерполяционного многочлена не всегда ведет к улучшению аппроксимации [9]. Ситуация может быть улучшена при условии применения оптимизационных схем организации узлов интерполяции [10]–[12]. Однако далеко не всегда имеется практическая возможность такого выбора. Чаще всего сеточные данные задаются по условию задачи, а следовательно, последствия аппроксимации непредсказуемы. Расходимость ведет к еще более худшим результатам по причине того, что восстановление приближаемой функции может ухудшаться с уменьшением шага полигональной сетки [13].

Применение сплайнов является логическим развитием идеи многочленной интерполяции при специально подобранных сеточных данных. Если функция, подлежащая аппроксимации, имеет особенности в некоторых точках на сеточных интервалах, то она плохо приближается на всем интервале, но этой общей зависимости от локальных свойств можно избежать при использовании способности «склеенной» кусочной кривой к изгибанию в пространстве [14].

Заключение (Conclusion)

Использование преимущества по быстродействию формулы (7) при ее реализации на микропроцессорном уровне в бортовом компьютере может обеспечить возможность варьирования состава вахты на мостике в зависимости от реальной скорости обработки навигационной информации. Анализ поступающей информации в масштабе реального времени позволяет использовать минимальный состав вахты, так как исключается ситуация затруднительности судоводителем оценки потока данных. Как известно, вахтенная служба должна быть достаточной и соответствовать условиям плавания при обеспечении непрерывного надлежащего наблюдения. Капитан обязан усилить вахтенную службу, если любые обстоятельства не позволяют вахтенному персоналу обеспечить безопасность судна. Конкретный аспект применимости высокоскоростной обработки информации является одним из факторов, оказывающих влияние на эффективность несения вахты, который может позволить предотвратить ситуацию необходимости вызова дополнительных судоводителей и тем самым избежать избыточной усталости экипажа. Высокоскоростная обработка навигационной информации и наглядное представление ее в эргономическом для восприятия виде концентрирует внимание вахтенной службы на адекватной оценке обстановки, содействуя принятию правильного решения в вопросе грамотного управления морским подвижным объектом.

Впервые представленная модифицированная формула МНК может позволить оперативно обрабатывать избыточные массивы измерений навигационных параметров большой емкости в масштабе реального времени. При применении выведенной в предлагаемом исследовании формулы достигается одновременно двойной эффект: повышение точности конечных результатов [7] и организация высокоскоростных вычислений за счет оптимизации вычислительных затрат. Математическая модель восстановления навигационной изоповерхности эффективно реализуется при использовании формулы (7).

Вычислительной трансформации в процессе проведения компьютерных расчетов подвергаются все матричные компоненты [15], в том числе правая часть уравнения (2), а также искомая матрица неизвестных коэффициентов [*C*]. В результате применения полученной формулы влияние погрешностей округления на результаты компьютерных расчетов окажется несущественным. Поэтому веский аргумент в использовании распараллеливания матричных преобразований, согласно предлагаемой методике, является актуальным для обеспечения устойчивости вычислительной процедуры. Кроме того, логично выбор аппроксиманта сделать до практического использования формулы (7), тогда модифицированной вариант МНК восполнения навигационной изоповерхности позволит реализовать на выбор пользователя такие алгоритмические преимущества, как быстродействие или экономию оперативной памяти. В первом случае необходимо предварительно рассчитать сплайновые коэффициенты и хранить их в специальном массиве данных. При этом отсутствует алгоритмическая необходимость каждый раз заново пересчитывать скалярные множители, достаточно сделать это один раз вначале, так как формирование матриц зависит от известных сеточных данных и выбранного конкретного вида сплайна. Быстродействие обеспечивается за счет простого обращения к фиксированным ячейкам компьютерной памяти. Во втором случае коэффициенты рассчитываются по запросу и не подлежат длительному хранению, но при этом получается выигрыш в экономии компьютерных ресурсов памяти. Таким образом, конструкция нового вида МНК является оптимальным вычислительным методом. Сопоставимый результат в современных научных публикациях отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Квасов Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами: дис. … д-ра техн. наук / Б. И. Квасов. — Новосибирск, 1997. — 256 с.

2. *Свиньин С. Ф.* Финитные базисные функции в задачах формирования выборок сигналов конечной протяженности / С. Ф. Свиньин, А. И. Попов // Труды СПИИРАН. — 2015. — № 6 (43). — С. 50–67.

3. *Гатилов С. Ю.* Алгоритмы и программные средства для пересечения трехмерных тел в граничном представлении: автореф. дис. … канд. техн. наук / С. Ю. Гатилов. — Новосибирск, 2016. — 16 с.

4. *Квасов Б. И.* Распараллеливание вычислений при построении интерполяционных гиперболических сплайнов / Б. И. Квасов // Труды четвертой Сибирской школы-семинара по параллельным и высокопроизводительным вычислениям. — 2008. — С. 37–52.

5. *Bhimani J.* FiM: Performance Prediction for Parallel Computation in Iterative Data Processing Applications/J. Bhimani, N. Mi, M. Leeser, Z. Yang//2017 10th International Conference on Cloud Computing (CLOUD). — IEEE, 2017. — Pp. 359–366.DOI: 10.1109/CLOUD.2017.53.

6. *Angel E.* Interactive Computer Graphics: A Top-Down Approach with WebGL / E. Angel, D. Shreiner. — Pearson, Boston, 2014. — 736 p.

7. *Ююкин И. В.* Оптимизация моделирования навигационной изоповерхности методами базисных финитных сплайнов / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 2. — С. 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180- 2019-11-2-266-274.

8. *Мирошниченко П. В.* Автоматизация проектирования процесса намотки авиационных конструкций на основе применения локально-аппроксимационных сплайнов: дис. … канд. техн. наук / П. В. Мирошниченко. — М., 2014. — 119 с.

9. *Ebrahimi A.* A composite iterative procedure with fast convergence rate for the progressive-iteration approximation of curves / A. Ebrahimi, G.B. Loghmani // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2019. — Vol. 359. — Pp. 1–15. DOI: 10.1016/j.cam.2019.03.025.

10. *Zhang Y.* B-Spline Surface Fitting with Knot Position Optimization / Y. Zhang, J. Cao, Z. Chen, X. Li, X.M. Zeng // Computers and Graphics. — 2016. — Vol. 58. — Is. C. — Pp. 73–83. DOI: 10.1016/j.cag.2016.05010.

11. *Ebrahimi A.* Shape modeling based on specifying the initial B-spline curve and scaled BFGS optimization method / A. Ebrahimi, G.B. Loghmani // Multimedia Tools and Applications. — 2018. — Vol. 77. — Is. 23. — Pp. 30331–30351. DOI: 10.1007/s11042-018-6109-z.

12. *Ebrahimi A.* B-spline Curve Fitting by Diagonal Approximation BFGS Methods / A. Ebrahimi, G. B. Loghmani // Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A.Science. — 2019. — Vol. 43. — Is. 3. — Pp. 947–958. DOI: 10.1007/s40995-017-0347-1.

13. *Liew K. J.* B-Spline Surface Fitting on Scattered Points / K. J. Liew, A. Ramli, A. A. Majid // Applied Mathematics & Information Sciences. — 2016. — Vol. 10. — Is. 1. — Pp. 273–281. DOI: 10.18576/amis/100128.

14. *Дорофеев А. А.* Моделирование и обработка числовых данных с помощью унифицированной технологии построения интерполяционных сплайнов: дис. … канд. техн. наук / А. А. Дорофеев. — Новочеркаск, 2016. — 231 с.

15.*Gatilov S. Y.* Using low-rank approximation of the Jacobian matrix in the Newton-Raphson method to solve certain singular equations / S. Y. Gatilov // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 272. — Pp. 8–24. DOI: 10.1016/j.cam.2014.04.024.

REFERENCES

1. Kvasov, B. I. Metody izogeometricheskoy approksimatcii splaynami. Dr. Diss. Novosibirsk, 1997.

2. Svinyin, Sergey Fedorovich, and Aleksandr Igorevich Popov. “Finite Basic Functions in the Tasks of Sampling Signals of Finite Extension.” *SPIRAS Proceedings* 6(43) (2015): 50–67.

3. Gatilov, StepanYu. Algoritmy i programmnye sredstva dlya peresecheniya trechmernych tel v granichnom predstavlenii. Abstract of PhD diss. Novosibirsk, 2016.

4. Kvasov, B. I. “Rasparallelivanie vychisleniy pri postroenii interpolyatsionnyh giperbolicheskih splaynov.” *Trudy chetvertoy Sibirskoy skoly-seminara po parallel’nym i vysokoproizvoditel’nymvychisleniyam.*2008. 37–52.

5. Bhimani, Janki, Ningfang Mi, Miriam Leeser, and Zhengyu Yang. “FiM: Performance Prediction for Parallel Computation in Iterative Data Processing Applications.” *2017 10th International Conference on Cloud Computing* (*CLOUD*). IEEE, 2017. 359–366. DOI: 10.1109/CLOUD.2017.53.

6. Angel, E., and D. Shreiner. *Interactive Computer Graphics: A Top-Down Approach with WebGL*. Pearson, Boston, 2014.

7. Yuyukin, Igor V. “Optimization of navigational isosurface simulation by the methods of basic finite splines.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.2 (2019): 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.

8. Miroshnichenko, P. V. Avtomatizatsiya proektirovaniya protsessa namotki aviatsionnyh konstruktsiy na osnove primeneniya lokal’no-approksimatcionnyh splaynov. PhD diss. M, 2014.

9. Ebrahimi, Alireza and Ghasem Barid Loghmani. “A composite iterative procedure with fast convergence rate for the progressive-iteration approximation of curves.” *Journal of Computational and Applied Mathematics* 359 (2019): 1–15. DOI: 10.1016/j.cam.2019.03.025.

10. Zhang, Yuhua, Juan Cao, Zhonggui Chen, Xin Li, and Xiao-Ming Zeng. “B-Spline Surface Fitting with Knot Position Optimization.” *Computers and Graphics* 58.C (2016): 73–83. DOI: 10.1016/j.cag.2016.05010.

11. Ebrahimi, Alireza and Ghasem Barid Loghmani. “Shape modeling based on specifying the initial B-spline curve and scaled BFGS optimization method.” *Multimedia Tools and Applications* 77.23 (2018): 30331–30351. DOI: 10.1007/s11042-018-6109-z.

12. Ebrahimi, Alireza and Ghasem Barid Loghmani. “B-spline Curve Fitting by Diagonal Approximation BFGS Methods.” *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A.Science* 43.3 (2019): 947–958. DOI: 10.1007/s40995-017-0347-1.

13. Liew, Khang Jie, Ahmad Ramli, and Ahmad AbdulMajid. “B-Spline Surface Fitting on Scattered Points.” *Applied Mathematics & Information Sciences* 10.1 (2016): 273–281. DOI: 10.18576/amis/100128.

14.Dorofeev, A.A. Modelirovanie i obrabotka chislovyh dannyh s pomoshch’u unifitsirovannoy tehnologii postroenia interpolyatcionnyh splaynov. PhD diss. Novocherkask, 2016.

15. Gatilov, Stepan Yu. “Using low-rank approximation of the Jacobian matrix in the Newton-Raphson method to solve certain singular equations.” *Journal of Computational and Applied Mathematics* 272 (2014): 8–24. DOI: 10.1016/j.cam.2014.04.024.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ	INFORMATION ABOUT THE AUTHOR
Ююкин Игорь Викторович — кандидат технических наук, доцент ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова» 198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7 e-mail: *enigma_777@mail.ru*, *kaf _nav@gumrf.ru*	**Yuyukin, Igor V. —** PhD, associate professor Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping 5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035, Russian Federation e-mail: *enigma_777@mail.ru*, *kaf _nav@gumrf.ru*

Статья поступила в редакцию 29мая 2019 г.
Received: May29, 2019.