ВЕСТНИК ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА ИМЕНИ АДМИРАЛА С. О. МАКАРОВА

DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036

SPLINE INTERPOLATION OF NAVIGATIONAL ISOLINES

I. V. Yuyukin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

It is noted that spline interpolation's application has established the real possibility for the direct handling of initial navigational function in the practical tasks of navigation, giving the chance to refuse the fictitious mathematical object in the form of line of position. Constructively proposed in the work method automatically upgrades the standards of navigation accuracy due to the absolute elimination of systematic error. Two alternative approaches on the base of finite splines and classic spline-interpolation have been developed. The speeds of calculating operations and the compactness of information storage are achieved due to the compression of data files while each spline method approbation in the on-board computer. The results of test experiments are cited. The special significance of the approach's realization is emphasized in applications of astronavigation during the purposeful using of the celestial navigation means in the actual practice of nowadays. The isoline is interpreted as special case of the navigational isosurface. The understanding of physical difference between spline and the generated navigational function is demonstrated visually. The finite construction is the secondary mathematical toolkit relatively to the original navigational functional dependence. The real mathematical curve is synthesized due to the multiplication of «cap» functions sequence by calculating scalar coefficients, thus base artificial construction is formed. The geometric interpretation of reconstruction operation for hypothetical navigational isoline by basic splines methods has been illustrated. On the base of special theoretical investigation the expedience for the optimal option of cubic finite functions on the four net intervals is substantiated. The developed algorithms permit to use the corrupted by corrections navigational isolines directly for the differential mode. The corrupted isoline has complicated mathematical formalization and it is impossible to solve, in principle, the mission of fixing ship position by the traditional way. The synthesis of corrupted isolines by spline-interpolation methods does not represent the real problem within the limits of two developed approaches.

Keywords: B-spline, navigational isosurface, generated navigational function, «cap» function, net interval, corrupted isoline, differential mode.

For citation:
Yuyukin, Igor V. "Spline interpolation of navigational isolines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.6 (2019): 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.

УДК 656.61.052 656

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ИЗОЛИНИЙ

И. В. Ююкин

ФГБОУВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Отмечается, что применение сплайновой интерполяции изолиний создает реальную возможность для непосредственного оперирования исходной навигационной функцией в прикладных задачах судовождения, предоставляя перспективу отказаться от фиктивного математического объекта в виде линии положения. Конструктивно предложенный в работе метод автоматически повышает стандарты точности навигации ввиду абсолютного устранения систематической погрешности. Разработаны два альтернативных подхода на основе финитных сплайнов и классической сплайн-интерполяции. Достигнуты быстродействие вычислительных операций и компактность хранения информации за счет алгоритмического сжатия массивов данных навигационных параметров при апробировании в бортовом компьютере каждого сплайнового метода. Приводятся результаты тестовых экспериментов. Подчеркивается особая значимость реализации предлагаемого подхода в приложениях астронавигации при целенаправленном использовании автономности средств мореходной астрономии в реальных условиях современности. Изолиния интерпретируется как частный случай навигационная изоповерхности. Наглядно демонстрируется *понимание физического различия между сплайном и генерируемой навигационной функцией. Финитная конструкция является лишь вторичным математическим инструментарием по отношению к оригинальной навигационной функциональной зависимости. Реальная математическая кривая синтезируется путем умножения последовательности «шапочных» функций на расчетные скалярные коэффициенты, формируя тем самым базовую искусственную конструкцию. Иллюстрируется геометрическая интерпретация операции восстановления гипотетической навигационной изолинии методами базисных сплайнов. На основе специального теоретического исследования оптимальности носителя B-сплайна обосновывается целесообразность оптимального выбора кубических финитных функций на четырех сеточных интервалах. Разработанные алгоритмы позволяют напрямую использовать искаженные поправками навигационные изолинии при дифференциальном режиме. Искаженная изолиния имеет сложную математическую формализацию и традиционным путем задачу определения места судна решить, в принципе, невозможно. Синтез искаженных изолиний методами сплайн-интерполяции фактически не представляет реальной проблемы в рамках двух разработанных математических подходов.*

Ключевые слова: B-сплайн, навигационная изоповерхность, генерируемая навигационная функция, «шапочная» функция, сеточный интервал, искаженная изолиния, дифференциальный режим.

Для цитирования:
Ююкин И. В. Сплайн-интерполяция навигационных изолиний / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 6. — С. 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.

Введение (Introduction)

Для достижения быстродействия вычислительных операций и компактности хранения информации представляется актуальной интерполяция любых навигационных изолиний двумя различными сплайновыми методами. Для апробирования предлагаемого нового математического подхода к решению классических проблем навигации сформулированы следующие задачи:

1. Создание алгоритма интерполяции изолинии базисными финитными сплайнами с обеспечением конструктивного сжатия массивов данных навигационных параметров.

2. Разработка альтернативного высокоскоростного алгоритма классической сплайн-интерполяции навигационной изолинии.

3. Программная реализация для бортового компьютера сплайновых алгоритмов в двух исследуемых вариантах.

Сплайновую апробацию можно трактовать как усиление позиций обобщенного метода навигационных изолиний [1] с применением достижений современной математики.

Применение сплайновой интерполяции навигационных изолиний логичным образом согласуется с идеей отказа от общепринятого метода линий положения и непосредственного оперирования базовыми изолиниями в информационных технологиях судовождения [2]. Особую значимость в условиях современности предлагаемый подход приобретает в приложениях астронавигации при прямом аналитическом варианте расчета координат местоположения судна [3] на основе сплайнового восполнения круга равных высот с использованием вычислительных ресурсов бортового компьютера. При таком подходе отпадает необходимость выполнять графическую прокладку линий положения, до сих пор применяемую в практике судовождения [2]. Кроме того, в условиях реализации перспективной математики появляется реальная возможность продуктивно использовать автономность средств мореходной астрономии, что приобретает особую важность в случае блокирования доступа к глобальной спутниковой позиционной системе морским гражданским потребителям в случае локальных военных конфликтов.

В настоящее время все еще существуют технические сложности получения спутниковых данных в некоторых районах Мирового океана, в такие моменты применение методов астронавигации остается единственной возможностью определить местоположение судна и поправку компаса в открытом море. Согласно проведенным экспериментам по исследованию навигационной обстановки в определенных районах, из-за перерывов в использовании спутниковых навигационных систем суммарное время отсутствия данных может составлять до 25–27 % от общего времени морского перехода [4]. В условиях современного дефицита времени на мостике становится оправданным внимание к ускоренной обработке астрономических наблюдений перспективными методами сплайн-функций.

Навигационную изолинию можно интерпретировать как частный случай изоповерхности, так как изолинии графически являются контурными линиями уровня навигационной изоповерхности при рассмотрении конкретного проекционного сечения [5], [6]. Однако, если постановкой задачи обработки навигационной информации определено оперирование исключительно с изолиниями, то появляется целесообразность в разработке отдельных перспективных алгоритмов сплайн-интерполяции изолинии в 2D формате.

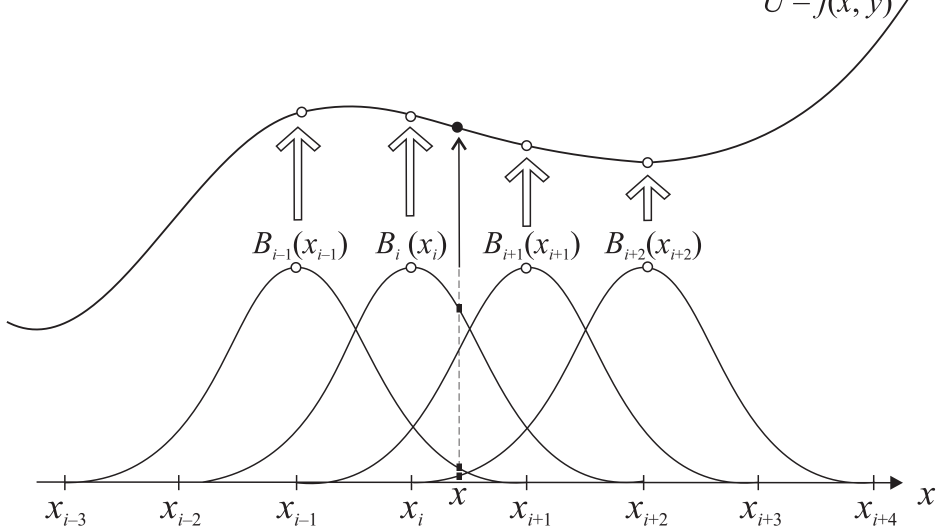
Методы и материалы (Methods and Materials)

В качестве методологической основы апробируется математический аппарат сплайн- функций. Под сплайном понимается кусочная функция, составленная из определенного числа многочленов невысокой степени и имеющая как минимум одну непрерывную производную. Термин «сплайн» в переводе с английского означает такой реальный физический объект, как гибкая линейка, т. е. приспособления, применяемого разметчиками плазов для оптимального проведения плавных кривых через фиксированные реперные точки. Благодаря упругости рейки и умелому манипулированию специальными грузами в опорных точках, получается плавная имитация оригинальной линии при минимизации полной свободной энергии упругой пластины [7].

В результате операции сплайнового приближения к исходной функции напряженная кривая оказывается математически «гладкой». Под математической гладкостью подразумевается успешность функциональной дифференцируемости [8]. Элементы многозвенника могут быть «склеены» между собой в узлах сетки до разной степени гладкости, начиная с того, что допускаются разрывы непрерывности до нескольких производных. Кусочные интерполяции являются наилучшим практическим средством приближения любой навигационной изолинии. В частности, сплайновые технологии самым эффективным образом используются для изучения геофизических данных [9].

Результаты (Results)

Навигационная функция $U = f(x, y)$ определяет математическую зависимость навигационных параметров в локальной системе координат для целей морской навигации. Интерполяция навигационной функции математически лучшим образом реализуется за счет умножения узловых значений базисных финитных значений $y_i = B_i(x_i)$ на расчетные скалярные сплайновые коэффициенты c_i в каждом узле сеточного интервала. Геометрическая интерпретация операции синтеза гипотетической навигационной функции методами базисных сплайнов показана на рисунке.



Геометрическая интерпретация интерполяции
гипотетической навигационной изолинии базисными сплайнами

На рисунке акцентировано внимание на технологической сущности процесса сплайн-интерполяции. Наглядно демонстрируется, что базисный сплайн и генерируемая функция $U = f(x, y)$ представляют собой разные физические объекты. B-сплайн организует базовую искусственную конструкцию, а не является непосредственно фактическим фрагментом кривой [5]. Реальная математическая кривая синтезируется путем умножения последовательности «шапочных» функций $B_i(x)$ на расчетные скалярные коэффициенты c_i как в каждой узловой точке, так и в любой промежуточной точке сеточного интервала. Таким образом, базисная финитная функция является вторичной по отношению к оригинальной навигационной функциональной зависимости. B-сплайн является математическим инструментарием для приближения навигационной функции.

Первоначально рассмотрим технологию интерполяции навигационной изолинии методом базисных сплайнов по первому варианту. Так как компоненты $B_i(x)$ финитны, то в каждом узле x_i от нуля отличны только активные элементы с номерами $i - 1$, i, $i + 1$. Следовательно, условия интерполяции навигационной функции приобретают вид

$$c_{i-1}B_{i-1}(x_i) + c_iB_i(x_i) + c_{i+1}B_{i+1}(x_i) = f_i,\ i = 1, \dots, N. \tag{1}$$

Однако в этом случае система (1), составленная из N уравнений, имеет $N + 2$ неизвестных c_i, поэтому для ее замыкания следует добавить краевые условия по первой производной, математически задающие физическую напряженность сплайновой кривой:

$$\left.\begin{aligned} &c_0B_0'(x_1) + c_1B_1'(x_1) + c_2B_2'(x_1) = f_1';\\ &c_{i-1}B_{i-1}(x_i) + c_iB_i(x_i) + c_{i+1}B_{i+1}(x_i) = f_i,\ \ i = 1,\dots,N;\\ &c_{N-1}B_{N-1}'(x_N) + c_NB_N'(x_N) + c_{N+1}B_{N+1}'(x_N) = f_N'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Используя краевые условия, исключаем c_0 и c_{N+1} из системы (2):

$$c_0 = \frac{f_1' - c_1B_1'(x_1) - c_2B_2'(x_1)}{B_0'(x_1)}; \tag{3}$$

$$c_{N+1} = \frac{f_N' - c_{N-1}B_{N-1}'(x_N) - c_NB_N'(x_N)}{B_{N+1}'(x_N)}.$$

Первое и последнее уравнения условий интерполяции приобретают вид:

$$c_0B_0(x_1) + c_1B_1(x_1) + c_2B_2(x_1) = f_1; \tag{4}$$

$$c_{N-1}B_{N-1}(x_N) + c_NB_N(x_N) + c_{N+1}B_{N+1}(x_N) = f_N.$$

Подставим в уравнения (4) вместо коэффициентов c_0 и c_{N+1} их выражения через краевые условия (3):

$$\frac{(f_1' - c_1B_1'(x_1) - c_2B_2'(x_1))B_0(x_1)}{B_0'(x_1)} + c_1B_1(x_1) + c_2B_2(x_1) = f_1; \tag{5}$$

$$c_{N-1}B_{N-1}(x_N) + c_NB_N(x_N) + \frac{(f_N' - c_{N-1}B_{N-1}'(x_N) - c_NB_N'(x_N))B_{N+1}(x_N)}{B_{N+1}'(x_N)} = f_N.$$

С учетом уравнений (5) в модифицированном виде система (2) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &c_1\left[B_1(x_1) - \frac{B_1'(x_1)}{B_0'(x_1)}B_0(x_1)\right] + c_2\left[B_2(x_1) - \frac{B_2'(x_1)}{B_0'(x_1)}B_0(x_1)\right] = f_1 - \frac{f_1'(x_1)}{B_0'(x_1)}B_0(x_1);\\ &c_{i-1}B_{i-1}(x_i) + c_iB_i(x_i) + c_{i+1}B_{i+1}(x_i) = f_i,\ \ i = 2,\dots,N-1;\\ &c_{N-1}\left[B_{N-1}(x_N) - \frac{B_{N-1}'(x_N)}{B_{N+1}'(x_N)}B_{N+1}(x_N)\right] + c_N\left[B_N(x_N) - \frac{B_N'(x_N)}{B_{N+1}'(x_N)}B_{N+1}(x_N)\right] =\\ &= f_N - \frac{f_N'}{B_{N+1}'(x_N)}B_{N+1}(x_N) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Матричная форма построения базисного интерполяционного сплайна формируется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} L_1 & P_1 & 0 & K_1 \\ K_2 & L_2 & P_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & K_{N-1} & L_{N-1} & P_{N-1} \\ P_N & 0 & K_N & L_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^* \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ f_N^* \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

где $K_1 = 0$;

$$L_1 = B_1(x_1) - \frac{B_1'(x_1)}{B_0'(x_1)} B_0(x_1);$$

$$P_1 = B_2(x_1) - \frac{B_2'(x_1)}{B_0'(x_1)} B_0(x_1);$$

$$K_N = B_{N-1}(x_N) - \frac{B_{N-1}'(x_N)}{B_{N+1}'(x_N)} B_{N+1}(x_N);$$

$$L_N = B_N(x_N) - \frac{B_N'(x_N)}{B_{N+1}'(x_N)} B_{N+1}(x_N);$$

$P_N = 0$;

$K_i = B_{i-1}(x_i)$;

$L_i = B_i(x_i)$;

$P_i = B_{i+1}(x_i)$;

$$f_1^* = f_1 - \frac{f_1'}{B_0'(x_1)} B_0(x_1);$$

$$f_N^* = f_N - \frac{f_N'}{B_{N+1}'(x_N)} B_{N+1}(x_N).$$

Вычисление скалярных коэффициентов кубических сплайнов (6) предполагает решение линейных алгебраических систем. Матрицы таких систем имеют трехдиагональную структуру [10], вследствие этого метод исключения Гаусса реализуется по более простым формулам так называемого *метода прогонки*. На первом этапе вычисляются по рекуррентным формулам коэффициенты V_i и W_i при $i = 1, \dots, N$:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= 0; \\ W_0 &= 0; \\ V_i &= -\frac{P_i}{L_i + K_i V_{i-1}}; \\ W_i &= \frac{f_i - K_i W_{i-1}}{L_i + K_i V_{i-1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Далее непосредственно вычисляются в обратном порядке неизвестные c_i, начиная с коэффициента c_N:

$$c_i = V_i c_{N+1} + W_i, \tag{9}$$

где индекс i убывает от N до 1, а $c_{N+1} = 0$, так как $c_N = W_N$.

Найденные скалярные сплайновые коэффициенты c_i необходимы для умножения в каждом сеточном узле на базисные компоненты $B_i(x_i)$ с целью реализации непосредственно процедуры сплайн-интерполяции как таковой.

Генерирование навигационной функции в произвольной точке $x \in [x_i, x_{i+1}]$ сеточного интервала (см. рисунок с. 1028) осуществляется на основе базисной сплайновой композиции [5]:

$$S(x) = c_{i-1}B_{i-1}(x) + c_i B_i(x) + c_{i+1}B_{i+1}(x) + c_{i+2}B_{i+2}(x).$$

Классический полиномиальный кубический сплайн альтернативным методом по второму варианту на каждом сеточном отрезке представляет собой многочлен третьей степени, являясь фактической заменой навигационной изолинии в заданном коридоре точности на каждом сеточном промежутке:

$$S_i(x) = A_i + B_i(x - x_i) + C_i(x - x_i)^2 + D_i(x - x_i)^3;\ i = 1, .., N;\ x_i < x < x_{i+1}, \tag{10}$$

где A_i, B_i, C_i, D_i — неизвестные скалярные сплайновые коэффициенты, подлежащие математическому определению.

Смысл числовых сплайновых коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i прояснится в результате тройного дифференцирования (10):

$$\left.\begin{aligned} S_i'(x) &= B_i + 2C_i(x - x_i) + 3D_i(x - x_i)^2;\\ S_i''(x) &= 2C_i + 6D_i(x - x_i);\\ S_i'''(x) &= 6D_i. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Окончательная аналогия дифференцирования может быть представлена следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A_i &= S_i(x_i);\\ B_i &\approx S_i'(x_i);\\ C_i &\approx S_i''(x_i);\\ D_i &\approx S_i'''(x_i). \end{aligned}\right\}$$

Условия интерполирования определяют равенство навигационной функции соответствующему сплайновому коэффициенту в сеточных узлах:

$$A_i = f(x_i),\ i = 1, \ldots, N.$$

Требование непрерывности сплайн-функции $S(x)$ приводит к условиям: $S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$, $i = 1, \ldots, N - 1$. Учитывая выражения для $S_i(x)$, получим при $i = 1, \ldots, N - 1$ уравнения вида:

$$A_i = A_{i+1} + B_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + C_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2 + D_{i+1}(x_i - x_{i+1})^3. \tag{12}$$

Обозначим шаг сетки $h_i = x_i - x_{i-1}$ и с учетом интервального шага перепишем уравнения (12) в новом виде:

$$\left.\begin{aligned} B_i h_i - C_i h_i^2 + D_i h_i^3 &= f_i - f_{i-1},\ i = 1, \ldots, N;\\ B_{i+1}(x_i - x_{i+1}) &= -B_i(x_i - x_{i-1});\\ C_{i+1}(x_i - x_{i+1}) &= -C_i(x_i - x_{i-1});\\ D_{i+1}(x_i - x_{i+1}) &= -D_i(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Условия непрерывности первой производной $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$, $i = 1, \ldots, N - 1$ приводят к уравнениям вида:

$$B_i = B_{i+1} + 2C_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + 3D_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2. \quad (14)$$

При шаге $h_i = x_i - x_{i-1}$ уравнение (14) примет вид:

$$2C_i h_i - 3D_i h_i^2 = B_i - B_{i-1}, \; i = 1, \ldots, N. \quad (15)$$

Из условий непрерывности второй производной $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ получим уравнения:

$$C_i = C_{i+1} + 3D_{i+1}(x_i - x_{i+1}). \quad (16)$$

Перепишем уравнение (16) для шага $h_i = x_i - x_{i-1}$:

$$3D_i h_i = C_i - C_{i-1}, \; i = 1, \ldots, N. \quad (17)$$

Объединяя первое уравнение системы (13), а также уравнения (15) и (17), получим систему $3N - 2$ уравнений относительно $3N$ неизвестных B_i, C_i, D_i, $i = 1, \ldots, N$:

$$\left.\begin{aligned} B_i h_i - C_i h_i^2 + D_i h_i^3 &= f_i - f_{i-1}; \\ 2C_i h_i - 3D_i h_i^2 &= B_i - B_{i-1}; \\ 3D_i h_i &= C_i - C_{i-1}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Два недостающих уравнения вводим, задавая граничные условия для $S(x)$. Тогда приходим к замкнутой системе уравнений для определения коэффициентов кубического сплайна. Исключим из системы (18) переменные B_i и D_i. Для этого рассмотрим разность двух уравнений вида (13):

$$\left.\begin{aligned} B_i h_i - C_i h_i^2 + D_i h_i^3 &= f_i - f_{i-1}; \\ B_{i-1} h_{i-1} - C_{i-1} h_{i-1}^2 + D_{i-1} h_{i-1}^3 &= f_{i-1} - f_{i-2}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Для упрощения алгебраической системы разделим первое уравнение (19) на h_i, а второе — на h_{i-1}:

$$\left.\begin{aligned} B_i - C_i h_i + D_i h_i^2 &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}; \\ B_{i-1} - C_{i-1} h_{i-1} + D_{i-1} h_{i-1}^2 &= \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

В результате вычитания из первого уравнения (20) второго получим

$$B_i - B_{i-1} = (C_i h_i - C_{i-1} h_{i-1}) - (D_i h_i^2 - D_{i-1} h_{i-1}^2) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}. \quad (21)$$

Подставим в уравнение (21) вместо $B_i - B_{i-1}$ выражение (15):

$$2C_i h_i - 3D_i h_i^2 = C_i h_i - C_{i-1} h_{i-1} D_i h_i^2 + D_{i-1} h_{i-1}^2 + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}. \quad (22)$$

После приведения подобных элементов выражение (22) окончательно примет вид:

$$C_i h_i + C_{i-1} h_{i-1} - 2D_i h_i^2 - D_{i-1} h_{i-1}^2 = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}. \quad (23)$$

Используя уравнение (17), находим:

$$\left.\begin{aligned} D_i h_i^2 &= \frac{(C_i - C_{i-1}) h_i}{3}; \\ D_{i-1} h_{i-1}^2 &= \frac{(C_{i-1} - C_{i-2}) h_{i-1}}{3}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Подставив выражения (24) в (23) получим:

$$C_i h_i + C_{i-1} h_{i-1} - \frac{2}{3}(C_i - C_{i-1}) h_i - \frac{1}{3}(C_{i-1} - C_{i-2}) h_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}. \quad (25)$$

Умножив уравнение (25) на «три» и раскрыв скобки, получим

$$3C_ih_i + 3C_{i-1}h_{i-1} - 2C_ih_i + 2C_{i-1}h_i - C_{i-1}h_{i-1} + C_{i-2}h_{i-1} = 3\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right). \quad (26)$$

Приведение подобных элементов в выражении (26) позволит получить

$$C_ih_i + 2C_{i-1}(h_{i-1} + h_i) + C_{i-2}h_{i-1} = 3\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right). \quad (27)$$

Возвращаясь к шагу сетки $h_i = x_{i+1} - x_i$, преобразуем выражение (27) к окончательному виду:

$$C_{i+1}h_{i+1} + 2C_i(h_i + h_{i+1}) + C_{i-1}h_i = 3\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),\ i = 1, \dots, N-1. \quad (28)$$

Решение трехдиагональной матрицы системы находится методом прогонки. По найденным коэффициентам C_i определяются коэффициенты B_i и D_i с помощью системы уравнений (18):

$$\left.\begin{aligned} D_i &= \frac{C_i - C_{i-1}}{3h_i}; \\ B_i &= C_ih_i - D_ih_i^2 + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Сплайновая альтернатива обеспечивает высокоскоростной расчет любой навигационной изолинии за счет логической оптимизации вычислительной структуры полиномиальной сплайн-интерполяции в сравнении с применением базисных финитных сплайнов.

Обсуждение (Discussion)

Представляется целесообразным провести анализ оптимальности конфигурирования *B*-сплайнов на определённом типе носителей. Существует возможность построить систему базисных функций различными путями. Можно, например, умножить $B_i(x_i)$ на множители и получить альтернативную систему. Тогда, правда, «шапочные» функции [11] утратят свойство нормализованности, т. е. алгоритмической возможности разбиения численной единицы на составляющие для базисного сплайна [5]. Можно построить финитные функции и с другим носителем, содержащим не четыре интервала, как в разработанном автором статьи алгоритме [5], а, например, пять или более [12], а вот уменьшить носитель не удастся [13]. В этом можно убедиться, если выполнить подсчет коэффициентов и условий, налагаемых на элемент $B_i(x_i)$. В случае носителя, состоящего из трех интервалов, число коэффициентов равно числу условий, и решением служит сплайн, тождественно равный нулю [14]. При двух сеточных интервалах задача переопределена, т. е. коэффициентов меньше, чем условий, и также имеет место лишь нулевое решение [15]. Таким образом, задача искусственного моделирования кривых линий [16] решится наилучшим образом, если применяемые базисные функции образуются на минимальных возможных сеточных носителях.

Представляется нецелесообразным механическое увеличение маркерных носителей сплайна [17], что привело бы к неизбежному увеличению числа диагоналей в интерполяционной матрице, а это, разумеется, является невыгодным в вычислительном смысле. В результате данного проведенного специального исследования оптимальности носителя *B*-сплайна конечный выбор сделан на построении кубических финитных функций на четырех сеточных интервалах [5]. Традиционные сплайны показали эффективность по быстродействию при интерполяции навигационных изолиний, но уступают базисным сплайнам по компактности хранения информации и вычислительным особенностям базисных сплайн-функций при синтезе навигационной изоповерхности [6].

Расчет на базе классических полиномиальных сплайнов по результатам специально организованных вычислительных экспериментов дает результат увеличения быстродействия не менее 30 % по сравнению со стандартными решениями, что практически обеспечивает возможность выполнения навигационных вычислений в масштабе реального времени. Время работы программно-реализованных алгоритмов замерялось в тысячных долях секунды с зацикливанием на 100000 при решении одинаковых тестовых примеров.

В случае восстановления навигационной изоповерхности на первый план выступают преимущества нетрадиционных для математических основ судовождения базисных сплайнов по фактору алгоритмической возможности экономии оперативной памяти бортового компьютера. Из-за конструктивной особенности базисной структуры *B*-сплайна, объем хранимой навигационной информации сокращается в 4 раза по сравнению с алгоритмом классической полиномиальной сплайн-интерполяции [5].

Выводы (Summary)

Проведенное в работе исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. Для создания прогрессивных алгоритмов интерполяции навигационной функции в долгосрочной перспективе следует отдать предпочтение эффективной декомпозиции вычислительной процедуры на основе *B*-сплайнов.

2. На основе разработанного методического и алгоритмического обеспечения автоматизации интерполяции навигационной функции любой степени сложности составлены две паскаль-программы, обеспечивающие высокую точность [5] и устойчивость вычислительных процедур. В качестве прикладного программного обеспечения для бортового компьютера апробируется метод на основе базисных финитных сплайнов и полиномиальной сплайн-интерполяции.

3. Разработанные алгоритмы позволяют напрямую использовать сетку искаженных поправками изолиний при широко используемом в современном судовождении дифференциальном режиме в различных его вариантах. Искаженная изолиния имеет сложную математическую формализацию, и традиционным путем навигационную задачу решить в этом случае невозможно. Синтез искаженных изолиний методами сплайн-интерполяции не представляет реальной математической проблемы с позиций аппарата кусочных интерполяций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вульфович Б. А.* Основы общей теории навигационных изолиний: автореф. дис. … д-ра техн. наук / Б. А. Вульфович. — Л., 1975. — 43 с.

2. *Вульфович Б.А.*К вопросу о применении современных информационных технологий при астронавигационном определении места судна / Б. А. Фульфович, В. А. Фогилев // Вестник Мурманского государственного технического университета. — 2008. — Т. 11. —№ 3. — С. 446–450.

3. *Vulfovich B.* New Ideas for Celestial Navigation in the Third Millennium/ B. Vulfovich, V. Fogilev // The Journal of Navigation. — 2010. —Vol. 63. —Is. 2. —Pp. 373–378. DOI: 10.1017/S0373463309990348.

4. *Фогилев В. А.* Аналитические методы обработки и точность астронавигационных обсерваций: автореф. дис. … канд. техн. наук / В. А. Фогилев. — СПб., 2012. — 25 с.

5. *Ююкин И. В.* Оптимизация моделирования навигационной изоповерхности методами базисных финитных сплайнов / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 2. — С. 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.

6. *Ююкин И. В.* Модификация метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации навигационной изоповерхности/ И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т.11. — № 4. — С. 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.

7. *Volkov Y. S.* Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation /Y.S.Volkov, Y.N.Subbotin //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2015. —Vol. 288. —Is. 1. —Pp. 222–237. DOI: 10.1134/S0081543815020236.

8. *Dmitriev V. I.* The Regularized Spline (R-Spline) Method for Function Approximation / V. I.Dmitriev, J. G. Ingtem //Computational Mathematics and Modeling. — 2019. —Vol. 30. —Is. 3. —Pp. 198–206. DOI: 10.1007/s10598-019-09447-w.

9. *Mariani M. C.* Spline interpolation techniques applied to the study of geophysical data / M. C.Mariani, K. Basu // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2015. —Vol. 428. —Pp. 68–79. DOI: 10.1016/j.physa.2015.02.014.

10. *Volkov Y. S.* The General Problem of Polynominal Spline Interpolation / Y. S. Volkov //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.—2018.—Vol.300.—Suppl.1.—Pp. 187–198. DOI: 10.1134/S0081543818020190.

11. *Shevaldin V. T.* Calibration relations for analogues of the basis splines with uniform nodes / V. T. Shevaldin//Ural Mathematical Journal. —2017. —Vol. 3. —Is. 1. —Pp. 76–80. DOI: 10.15826/umj.2017.1.006.

12. *Субботин Ю. Н.* Об одном методе построения локальных параболических сплайнов с дополнительными узлами / Ю. Н. Субботин, В. Т. Шевалдин // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2019. —Т. 25— № 2. — С. 205–219.DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-205-219.

13. *Шевалдин В. Т.* Алгоритмы построения локальных экспоненциальных сплайнов третьего порядка с равноотстоящими узлами / В. Т. Шевалдин // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25— № 3. — С. 279–287. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-279-287.

14. *Shevaldin V. T.* A Method for the Construction of Wavelet Analogs by Means of Trigonometric B-Splines / V. T. Shevaldin // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2018. — Vol. 300. — Suppl. 1. — Pp. 165–171. DOI: 10.1134/S0081543818020165.

15. *Jiwari R.* A class of numerical algorithms based on cubic trigonometric B-spline functions for numerical simulation of nonlinear parabolic problems / R. Jiwari, S. Pandit, M. E. Koksal // Computational and Applied Mathematics. — 2019. —Vol. 38. —Is. 3.—Pp. 140. DOI: 10.1007/s40314-019-0918-1.

16. *Subbotin Y. N.* Uniform approximation of curvature of smooth planar curves / Y. N. Subbotin, S. A. Telyakovskii // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2018. —Vol. 300. — Suppl. 1. — Pp. 184–186. DOI: 10.1134/S0081543818020189.

17. *Гатилов С. Ю.* Локальный анализ задач и пересечения кривых и поверхностей методом трассировки / С. Ю. Гатилов // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. — 2016. —Т. 16. — № 1. — С. 57–89.DOI: 10.17377/PAM.2016.16.105.

REFERENCES

1. Vulfovich, Boris A. Osnovy obshey teoriinavigatsionnyhizoliniy. Abstract of Dr. Diss. L., 1975.

2. Vulfovich, Boris A., and V. A. Fogilev.“On application of modern computer technologies for celestial fixes.”*Vestnik Murmanskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta* 11.3(2008): 446–450.

3. Vulfovich, Boris, and Vasily Fogilev. “New ideas for celestial navigation in the third millennium.” *The Journal of Navigation* 63.2 (2010): 373–378. DOI:10.1017/S0373463309990348.

4. Fogilev, Vasily A. Analiticheskie metody obrabotki i tochnost’ astronavigatsionnyh observatsiy. Abstract of PhD diss. SPb, 2012.

5. Yuyukin, Igor V. “Optimization of navigational isosurface simulation by the methods of basic finite splines.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.2 (2019): 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.

6. Yuyukin, Igor V. “Modification of the least squares method for splineapproximation of navigational isosurface.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova*11.4 (2019): 631–639. DOI:10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.

7. Volkov, Yuriy S., andYuriy N.Subbotin. “Fifty years of Schoenberg’s problem on the convergence of spline interpolation.” *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*288.1 (2015): 222–237. DOI: 10.1134/S0081543815020236.

8. Dmitriev, Vladimir I., and Jennie G. Ingtem.“The Regularized Spline (R-Spline) Method for Function Approximation.” *Computational Mathematics and Modeling* 30.3 (2019): 198–206. DOI: 10.1007/s10598-019-09447-w.

9. Mariani, Maria C., and Kanadpriya Basu. “Spline interpolation techniques applied to the study of geophysical data.” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*428 (2015): 68–79. DOI: 10.1016/j.physa.2015.02.014.

10. Volkov, Yuriy S. “The General Problem of Polynominal SplineInterpolation.” *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*300.1 (2018): 187–198. DOI: 10.1134/S0081543818020190.

11. Shevaldin, Valerii Trifonovich. “Calibration relations for analogues of the basis splines with uniform nodes” *Ural Mathematical Journal*3.1 (2017): 76–80.DOI:10.15826/umj.2017.1.006.

12. Subbotin, Yuriy N., and Valerii T. Shevaldin.“A method of construction of local parabolic splines with additional knots.” *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*25.2(2019): 205–219.DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-205-219.

13. Shevaldin, Valerii T. "Algorithms for the construction third-order local exponential splines with equidistant knots." *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 25.3 (2019): 279–287. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-279-287.

14. Shevaldin, Valerii T. "A Method for the Construction of Wavelet Analogs by Means of Trigonometric B-Splines." *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 300.1 (2018): 165–171. DOI: 10.1134/S0081543818020165.

15. Jiwari, Ram, Sapna Pandit, and Mehmet Emir Koksal. "A class of numerical algorithms based on cubic trigonometric B-spline functions for numerical simulation of nonlinear parabolic problems." *Computational and Applied Mathematics* 38.3 (2019): 140. DOI: 10.1007/s40314-019-0918-1.

16. Subbotin,Yuriy N., and Sergei A.Telyakovskii. "Uniform approximation of curvature of smooth planar curves." *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 300.1 (2018): 184–186. DOI: 10.1134/S0081543818020189.

17. Gatilov, Stepan Yu. "Local analysis of curves and surfaces intersection problem using tracing." *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics* 16.1 (2016): 57–89. DOI: 10.17377/PAM.2016.16.105.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ююкин Игорь Викторович —
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: *enigma_777@mail.ru, kaf _nav@gumrf.ru*

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yuyukin, Igor V. —
PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: *enigma_777@mail.ru, kaf _nav@gumrf.ru*

Статья поступила в редакцию 10 октября 2019 г.
Received: October 10, 2019.