

DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70

INTERPOLATION OF THE NAVIGATIONAL FUNCTION BY THE LAGRANGE TYPE SPLINE

I. V. Yuyukin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The issue of any navigational isoline interpolation by cubic spline of Lagrange type has been considered in detail. The developed approach is of independent practical interest; meanwhile the task of present study is implemented in an integrated way with the finite basic method. In fact, two conceptions are majorized: a method focused on associated Lagrange multipliers in the vicinity of the optimum of the task solution and coordinate B-spline that provides iterative finding of the result within the given accuracy limits. It is demonstrated the synchronous coincidence of Lagrange splines with B-splines at nodal points using the isogeometric construction principle with difference in contours of «step-functions» and «hat-functions». The harmonized mathematical model has allowed you to realize the compromise between the Lagrange analogies and the basic finite construction for the smooth interpolation of navigational function at chaotic state of metering data «noised» by errors. The interpolation of abstract navigational isoline by set of Lagrange splines is geometrically interpreted. The detailed algorithm with new mathematical tools is presented. The task functionality can be modified before restoring the navigational isosurface on the improvised net patch. As a discussion, the author's idea of the local interpolation applicability, provided that an additional compositional identity is introduced in order to calculate spline coefficients using explicit formulas, has been offered. The traditional formalization is transformed for logical connection establishment of spline coefficients with the measured navigational parameters. The locality allows you to manipulate invariant transformations between two different spline presentations with the formation of a single multilink attribute of bit algorithmization. Emphasis is placed on the computational advantages of the new approach on the solution stability and convergence. The hybrid unified algorithm displaces the spectrum of possibilities for processing navigational information to the search for solutions to the impossible tasks of modern navigation.

Keywords: lagrange type spline, coordinate B-spline, «step-functions», «hat-functions», harmonized model, «noised» date, net patch, hybrid algorithm.

For citation:

Yuyukin, Igor V. "Interpolation of the navigational function by the Lagrange type spline." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 12.1 (2020): 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.

УДК 656.61.052 656

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НАВИГАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СПЛАЙНОМ ЛАГРАНЖЕВА ТИПА

И. В. Ююкин

ФГБОУВО «ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Детально рассмотрен вопрос интерполяции любой навигационной изолинии кубическим сплайном лагранжева типа. Разработанный подход представляет самостоятельный практический интерес, при этом задача данного исследования реализуется комплексно в интегрированном варианте с финитным базисным методом. Фактически мажорируются две концепции: метод, ориентированный на ассоциированные лагранжевы множители в окрестности оптимума решения задачи, и координатный B-сплайн, обеспечивающий итерационное нахождение результата в заданных пределах точности. Демонстрируется синхронное совпадение лагранжевых сплайнов в узловых точках с B-сплайнами по изогеометрическому принципу построения с разницей в контурах «шаговых функций» с «шапочными функциями». Гармонизированная математическая модель позволяет реализовать компромисс между аналогиями Лагранжа и базисной финитной конструкцией для гладкой интерполяции навигационной функции при сложной хаотичности

«зашумленных» погрешностями измерительных данных. Геометрически интерпретируется интерполяция абстрактной навигационной изолинии набором сплайнов лагранжева типа. Приводится подробный алгоритм с новым математическим инструментарием. Функциональность задачи может быть модифицирована до восстановления навигационной изоповерхности на импровизированном сеточном патче. В качестве обсуждения предлагается авторская идея применимости локальной интерполяции при условии введения дополнительного композиционного тождества с целью вычисления сплайновых коэффициентов по явным формулам. Традиционная формализация переформатируется для установления логической связи сплайновых коэффициентов с измеренными навигационными параметрами. Локальность позволяет манипулировать инвариантными трансформациями между двумя различными сплайновыми представлениями с формированием единого многозвенного атрибута кусочной алгоритмизации. Акцентируется внимание на вычислительных преимуществах нового подхода по устойчивости и сходимости решения. Гибридный унифицированный алгоритм смещает спектр возможностей обработки навигационной информации на поиск решения невыполнимых задач современного судовождения.

Ключевые слова: сплайн лагранжева типа, координатный B -сплайн, «шапочная функция», «шаговая функция», гармонизированная модель, «зашумленные» данные, сеточный патч, гибридный алгоритм.

Для цитирования:

Ююкин И. В. Интерполяция навигационной функции сплайном лагранжева типа / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 1. — С. 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.

Введение (Introduction)

Для апробирования предлагаемого нового математического подхода к решению классической проблемы навигации по интерполированию навигационной функции сформулированы следующие задачи:

1. Создание алгоритма интерполяции навигационной изолинии сплайнами лагранжева типа.
2. Модифицирование гибридного подхода к задаче интерполяции лагранжевыми сплайнами в оптимальном сочетании с базисными финитными многозвенниками.
3. Программная реализация для бортового компьютера из состава навигационного автоматизированного комплекса алгоритма интерполяции сплайнами Лагранжа.

B -сплайны находят широкое современное применение в различных прикладных областях науки [1]–[3]. Ввиду непредсказуемости измерительных данных, в судовождении оправданно комбинировать финитный алгоритм с кусочными многочленами Лагранжа с тем, чтобы в любом случае решить задачу интерполяции навигационной функции наилучшим математическим образом. Кроме того, в некоторых навигационных задачах исходные данные могут быть известны только приближенно в виде набора интервалов допустимых значений навигационной функции. Поэтому представляет интерес разработка алгоритма интерполяции лагранжевыми сплайнами с одновременным адекватным восстановлением геометрических свойств навигационных изолиний.

Для расширения области сходимости вычислительного процесса целесообразно использовать интерполяцию сплайнами лагранжева типа в сочетании с финитным базисным интерполированием, несмотря на математически более сложную комбинацию двух подходов в рамках одного гибридного алгоритма [4]. Гармоничное сочетание двух разных сплайновых методов позволяет использовать преимущества как одного, так и другого варианта для успешного решения прикладных задач современной навигации. С позиций предлагаемого подхода мажорируются две концепции комбинированного алгоритма: метод, ориентированный на лагранжевы аналоги сплайнов в окрестности оптимума решения задачи, и активизация на границах коридора точности интерполяции B -сплайнов, обеспечивающих итерационный поиск устойчивого результата на всем диапазоне решений. Переключение на определенный метод осуществляется без применения специальных штрафных критериев, но схема реализуется автоматически за счет смещения вычислительного акцента в интерполяционной матрице простым численным превосходством множителей Лагранжа, или базиса «шапочных функций» [5]. В зависимости от того, какой метод масштабирует точнее интерполируемую навигационную функцию за счет умножения на унифицированные скалярные сплайновые коэффициенты вектора решений модификации метода наименьших ква-

дратов [6], выбирается тот, который обеспечивает гарантийное гладкое восстановление навигационной изолинии. В тех случаях, когда по условию постановки навигационной задачи известна априорная информация, позволяющая успешно выбрать начальное приближение, можно заблаговременно определить, какой из двух методов использовать. Напротив, при недостаточной адекватной исходной информации гибридный алгоритм является надежным ресурсом решения любой задачи судовождения.

Необходимость оперирования исходными данными спутниковых измерений гравитационного поля и трудности геодезических вычислительных процедур делают актуальным поиск нового перспективного метода решения задачи моделирования планетарного гравитационного поля. При очевидной сложности проблемы актуализируется апробирование синтеза геоидной модели Земли в приемлемом для использования в морской навигации виде. В перспективе максимальная точность глобальной навигации представляется связанной исключительно со сплайновым моделированием реальной формы Земли. Поскольку геоид является фигурой неправильной и имеет сложную грушевидную форму, формализовать такую изоповерхность при помощи классических аналитических зависимостей до проведения настоящего исследования считалось невозможным.

В современной практике навигации используют известный геометрический объект: эллипсоид вращения, образованный в результате вращения эллипса определенного размера вокруг малой оси. Для применимости в судовождении точно описываемого формулами математического атрибута используют некоторые геодезические условия: объем эллипсоида предполагается примерно равным объему геоида, большая полуось эллипсоида находится в плоскости экватора геоида, малая полуось эллипсоида направлена по оси вращения Земли. Удобство использования такой геодезической модели автоматически консервирует методическую погрешность, нивелирующую технические успехи систем спутниковой навигации. Пренебрежение отклонением эллипсоида от геоида может привести к значительным, согласно современным стандартам, расхождениям координат при определении местоположения судна, так как спутниковая обсервация получится ориентированной на ошибочную изоповерхность, поскольку морской подвижный объект движется по водной акватории, являющейся фрагментом реальной поверхности планеты Земля. Фатальным последствием возможных различий систем геодезических координат является навигационная ошибка, возникающая в результате пренебрежения учета поправок к географической широте и долготе, которая может достигать 350–400 м на местности [7], что существенно снижает технические характеристики точности в несколько метров систем GPS/ГЛОНАСС. Максимальное повышение точности спутниковых обсерваций при условии предельных требований к точному восстановлению геоида может быть эффективно обеспечено применением сплайнового гибридного алгоритма.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Алгоритм, составленный на основе сплайнов лагранжева типа как и *B*-сплайновый подход, является абсолютно универсальным в смысле независимости от конкретного вида интерполируемой навигационной функции. Математический вид функции определяется только оперативным ресурсом морского бортового компьютера с заложенными в ячейки памяти предварительно рассчитанными сплайновыми коэффициентами и сеточными параметрами для высокоскоростного вычисления значения любой навигационной функции по номеру сеточного интервала. Вследствие этого предполагается возможным решение широкого класса навигационных задач при интерполяции самых сложных изолиний вплоть до искаженных корректирующими поправками дифференциального режима гипербол вводимой в эксплуатацию системы e-Logan в рамках концепции e-Navigation. В исключительных обстоятельствах при планировании маршрута перехода может быть целесообразным использование приложения батиметрической навигации в электронно-картографических навигационно-информационных системах для учета местных особенностей плавания при анализе подводного профильного рельефа, восстановленного на основе методов сплайн-функций. При решении прикладных задач судовождения гибридная алгоритмическая модель может позволить реализовать

«компромисс» между сплайном Лагранжа и базисной финитной конструкцией для оптимальной интерполяции навигационной функции при сложной хаотичности измерений навигационных параметров.

Сплайн лагранжева типа всегда гарантирует сходимость интерполяционного процесса к интерполируемой функции [8] и пренебрежение данным преимуществом будет явным алгоритмическим упущением. Таким образом, точность аппроксимации может быть существенно повышена за счёт прерогативы интерполяции кусочно-кубическими полиномами Лагранжа.

Интерполяция навигационной функции математически реализуется за счет умножения множителей Лагранжа на расчетные скалярные коэффициенты c_i в каждом узле сеточного интервала. При смоделированном многообразии кусочных лагранжевых функций $L_i(x_i)$ предлагается к реализации следующая адаптированная под поставленную задачу алгоритмическая комбинация:

$$S(x) = \sum_{i=1}^N c_i L_i(x_i), \quad (1)$$

где c_i — линейные функционалы, подлежащие вычислению.

В процессе практических вычислений целесообразно использовать не классические полиномы Лагранжа, а модифицированные лагранжевы функции, получающиеся при манипулировании сплайнами посредством умножения на постоянные скалярные коэффициенты. Данный прием позволяет избежать негативный факт произвольного модифицирования некорректными масштабирующими соотношениями сплайн-функций. Сплайн лагранжева типа абсолютно нивелирует решающее отрицательное свойство глобальной полиномиальной интерполяции в виде обязательности пересчета всех множителей единого многочлена Лагранжа при простой необходимости добавления одного нового узла интерполяции.

Результаты (Results)

Положительный эффект конфигурированного формосохранения интерполяции [9] будет наблюдаться только при условии сопоставимости числового представления кубического сплайна лагранжева типа с дискретным контекстом навигационных параметров. В общем виде ассоциированные лагранжевы сплайн-функции предлагается на целочисленной сетке в минимизированном виде рассчитывать следующим образом:

$$L_{i,q} = \frac{(-1)^{k+1} k! (x_{q+k+1} - x_{q-k+1})}{\prod_{q,k} (x_i)}, \quad i - k + 1 \leq q \leq i + k - 1; \quad (2)$$

$$\prod_{\substack{q,k \\ i \neq q}} (x_i) = (x_i - x_{q-k+1})(x_i - x_{q-k+2}) \dots (x_i - x_{q+k-1}).$$

Для кубического сплайна $k = 3$ конкретизируем формулу (1):

$$L_{i,q} = \frac{(-1)^4 3! (x_{q+2} - x_{q-2})}{\prod_{q,3} (x_i)}, \quad i - 2 \leq q \leq i + 2. \quad (3)$$

В диапазоне $i - 2 \leq q \leq i + 2$ можно получить пять разновидностей формулы (3) для вычисления сплайновых коэффициентов Лагранжа в сеточных узловых точках по аналогии с базисным сплайном. Данные формулы организуются на базе пятиинтервального сеточного полигона в покомпонентной форме с учетом факта $(-1)^4 = 1$:

$$L_{i,i-2} = \frac{3!(x_i - x_{i-4})}{(x_i - x_{i-4})(x_i - x_{i-3})(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})}, \quad q = i - 2;$$

$$L_{i,i-1} = \frac{3!(x_{i+1} - x_{i-3})}{(x_i - x_{i-3})(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})}, \quad q = i - 1;$$

$$L_{i,i} = \frac{3!(x_{i+2} - x_{i-2})}{(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})}, \quad q = i; \quad (4)$$

$$L_{i,i+1} = \frac{3!(x_{i+3} - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})(x_i - x_{i+3})}, \quad q = i + 1;$$

$$L_{i,i+2} = \frac{3!(x_{i+4} - x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})(x_i - x_{i+3})(x_i - x_{i+4})}, \quad q = i + 2.$$

Принцип построения кусочно-определенных многочленов Лагранжа на пятиузловом сеточном сегменте аналогичен по организации своему прототипу в виде кубического нормализованного B -сплайна [9]. Для равномерной сетки формулы (4) реализуются в конкретные числовые коэффициенты кусочно-кубических многочленов Лагранжа:

$$L_{i,i-2} = \frac{6 \cdot (+4)}{(+4) \cdot (+3) \cdot (+2) \cdot (+1)} = \frac{+24}{+24} = +1;$$

$$L_{i,i-1} = \frac{6 \cdot (+4)}{(+3) \cdot (+2) \cdot (+1) \cdot (-1)} = \frac{+24}{(-6)} = -4;$$

$$L_{i,i} = \frac{6 \cdot (+4)}{(+2) \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot (-2)} = \frac{+24}{+4} = +6;$$

$$L_{i,i+1} = \frac{6 \cdot (+4)}{(+1) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)} = \frac{+24}{(-6)} = -4.$$

Отличие сплайна Лагранжа заключается в утрате ключевого свойства нормализованности базисных финитных конструкций, образующими разбиение единицы на определенных сеточных носителях конечной минимальной длины [10]. Основная конструкция кубического сплайна лагранжева типа в одномерной композиции представлена на рис. 1.

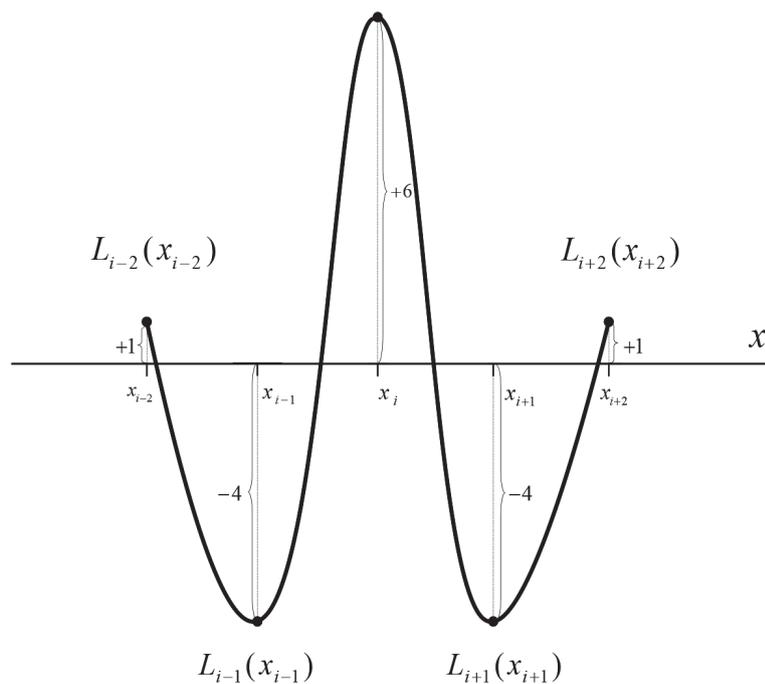


Рис. 1. Единичный формат кубического сплайна лагранжева типа на пятикратном узловом полигоне

Сплайны лагранжева типа синхронно совпадают в узловых точках сетки с базисными сплайнами по принципу организации построения, но различаются по форме в сплайновых контурах «шапочных функций» с так называемыми «шаговыми функциями» [8]. Геометрически каждый сплайн Лагранжа фактически синтезирует трехкратное сочетание импульсных образов «шаговой функции» в положительной и отрицательных областях определения функциональной зависимости.

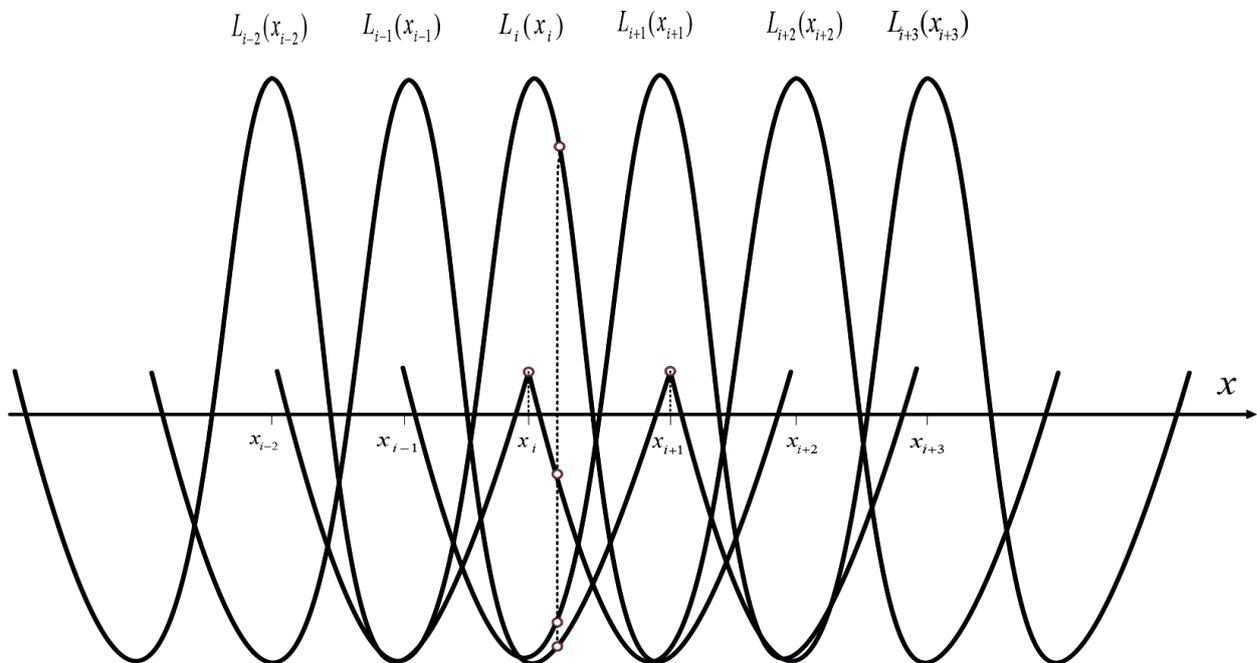


Рис. 2. Демонстрация вычисления произвольного значения навигационной функции через суммирование множителей Лагранжа

Генерирование навигационной функции в произвольной точке $x^* \in [x_i, x_{i+1}]$ потока числовой информации [11], включая границы обозначенного сеточного интервала (рис. 2), осуществляется на основе шестизлементной композиции сплайна лагранжевого типа в общем случае:

$$S(x^*) = c_{i-2}L_{i-2}(x^*) + c_{i-1}L_{i-1}(x^*) + c_iL_i(x^*) + c_{i+1}L_{i+1}(x^*) + c_{i+2}L_{i+2}(x^*) + c_{i+3}L_{i+3}(x^*). \quad (6)$$

Из анализа рис. 2 следует, что для любого промежуточного аргумента x^* внутри одного сеточного сегмента $[x_i, x_{i+1}]$ необходимо задействовать значения четырех функций Лагранжа: $L_{i-1}(x_{i-1})$, $L_i(x_i)$, $L_{i+1}(x_{i+1})$, $L_{i+2}(x_{i+2})$. Пятый множитель $L_{i-2}(x_{i-2})$ или $L_{i+3}(x_{i+3})$ участвует в расчете только в том случае, если необходимо выполнить вычисление в любом из двух узлов: x_i или x_{i+1} .

В формуле (6) условно фигурируют шесть компонент сплайнов лагранжева типа исключительно для теоретического обозначения в общем случае максимально возможных вариантов решения без необходимого вычета одного элемента за счет выбора вариантности в случае строгого попадания на любую границу единичного сеточного отрезка. Фактически при вычислении на левой или правой границе единичного носителя $[x_i, x_{i+1}]$ четыре активных элемента гладких аналогов лагранжевых сплайнов: $L_{i-1}(x_{i-1})$, $L_i(x_i)$, $L_{i+1}(x_{i+1})$, $L_{i+2}(x_{i+2})$, добавляются пятый: $L_{i-2}(x_{i-2})$ или $L_{i+3}(x_{i+3})$, с выбором из двух возможных вариантов, а шестой множитель: $L_{i+3}(x_{i+3})$ или $L_{i-2}(x_{i-2})$, автоматически принимает нулевое значение в зависимости от того, по левой или правой границе сеточного интервала выполняется вычисление.

Набор из сплайновых полиномов Лагранжа, восстанавливающих непрерывную навигационную функцию на интерполируемом интервале, формирует условную альтернативу B-сплайну в рамках одной гибридной системы линейных алгебраических уравнений в матричном исчислении [6].

Рис. 3 интерпретирует геометрическую интерполяцию гипотетической навигационной изолинии $U = f(x, y)$ в локальной системе координат серией модифицированных функций Лагранжа из шести вариаций основной конструкции сплайнового многозвенника аналогично ситуации с B -сплайном [12].

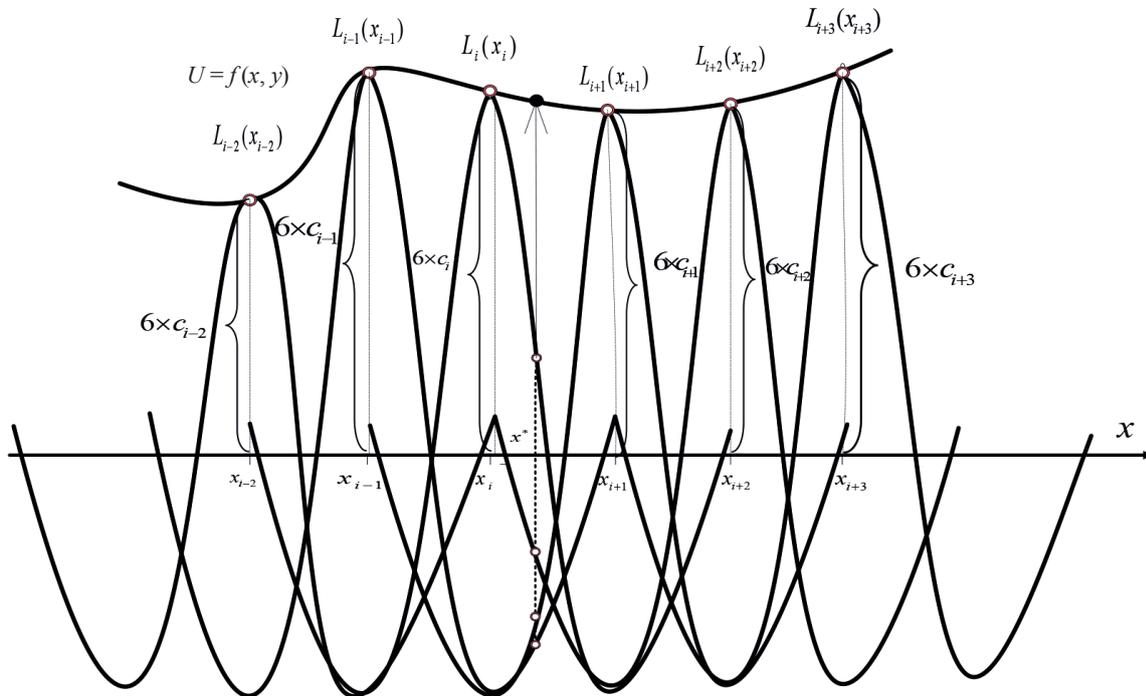


Рис. 3. Геометрическая интерпретация интерполяции абстрактной навигационной изолинии набором сплайнов лагранжева типа

Скалярные сплайновые коэффициенты c_i , фактически выполняющие в алгоритме опцию калибровочных соотношений [13], необходимы для умножения в каждом сеточном узле на лагранжевы компоненты $L_i(x_i)$ с целью реализации непосредственно процедуры сплайн-интерполяции как таковой. Рис. 3 поясняет технологическую концепцию процесса интерполяции за счет масштабирования множителей Лагранжа по прямой аналогии с базисным сплайном [12]. Наглядно демонстрируется, что лагранжев сплайн и синтезируемая навигационная функция представляют собой разные геометрические объекты. Ассоциированный лагранжев сплайн формирует по дискретным данным искусственную кусочную конструкцию, но аналогично координатному B -сплайну [14] не является непосредственно фактическим фрагментом интерполируемой кривой. Реальная математическая кривая синтезируется методом умножения последовательности множителей Лагранжа на скалярные коэффициенты $c_{i-2}, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}$ как в каждой узловой точке, так и в любой промежуточной точке сеточного интервала (см. рис. 2). Сплайн лагранжева типа представляет собой вторичную абстракцию по отношению к оригинальной навигационной функции.

В узле x_i сплайн лагранжева типа формируется на основе пяти активных элементов $L_i(x_i)$ с номерами $i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2$ в отличие от базисного сплайна, организованного из трех ненулевых коэффициентов [10]. Следовательно, условия интерполяции сплайном Лагранжа навигационной функции для левой границы симплекса $[x_i, x_{i+1}]$ приобретают вид

$$c_{i-2}L_{i-2}(x_i) + c_{i-1}L_{i-1}(x_i) + c_iL_i(x_i) + c_{i+1}L_{i+1}(x_i) + c_{i+2}L_{i+2}(x_i) = f_i, \quad i = 2, \dots, N - 1. \quad (7)$$

Однако в данном случае алгебраическая система уравнений (7), составленная из $N - 2$ уравнений, имеет N неизвестных c_i с учетом двух дополнительных коэффициентов: c_0 и c_{N+1} . Для замыкания системы (7) следует добавить два крайних условия по первой производной, математически задающих физическую напряженность сплайновой кривой:

$$\left. \begin{aligned} c_0 L'_0(x_2) + c_1 L'_1(x_2) + c_2 L'_2(x_2) + c_3 L'_3(x_2) + c_4 L'_4(x_2) &= f'_2; \\ c_{i-2} L_{i-2}(x_i) + c_{i-1} L_{i-1}(x_i) + c_i L_i(x_i) + c_{i+1} L_{i+1}(x_i) + c_{i+2} L_{i+2}(x_i) &= f_i; \quad i = 2, \dots, N-1 \\ c_{N-3} L'_{N-3}(x_{N-1}) + c_{N-2} L'_{N-2}(x_{N-1}) + c_{N-1} L'_{N-1}(x_{N-1}) + c_N L'_N(x_{N-1}) + c_{N+1} L'_{N+1}(x_{N-1}) &= f'_{N-1}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Используя краевые условия, исключаем c_0 и c_{N+1} из системы (8):

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{f'_2 - c_1 L'_1(x_2) - c_2 L'_2(x_2) - c_3 L'_3(x_2) - c_4 L'_4(x_2)}{L'_0(x_2)}, \\ c_{N+1} &= \frac{f'_{N-1} - c_{N-3} L'_{N-3}(x_{N-1}) - c_{N-2} L'_{N-2}(x_{N-1}) - c_{N-1} L'_{N-1}(x_{N-1}) - c_N L'_N(x_{N-1})}{L'_{N+1}(x_{N-1})}. \end{aligned} \quad (9)$$

Первое и последнее уравнения условий интерполяции приобретают вид:

$$\begin{aligned} c_0 L_0(x_2) + c_1 L_1(x_2) + c_2 L_2(x_2) + c_3 L_3(x_2) + c_4 L_4(x_2) &= f_2; \\ c_{N-3} L_{N-3}(x_{N-1}) + c_{N-2} L_{N-2}(x_{N-1}) + c_{N-1} L_{N-1}(x_{N-1}) + c_N L_N(x_{N-1}) + c_{N+1} L_{N+1}(x_{N-1}) &= f_{N-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставим в уравнения (10) вместо коэффициентов c_0 и c_{N+1} их выражения через краевые условия (9):

$$\begin{aligned} \frac{(f'_2 - c_1 L'_1(x_2) - c_2 L'_2(x_2) - c_3 L'_3(x_2) - c_4 L'_4(x_2)) L_0(x_2)}{L'_0(x_2)} + c_1 L_1(x_2) + c_2 L_2(x_2) + \\ + c_3 L_3(x_2) + c_4 L_4(x_2) = f_2; \\ c_{N-3} L_{N-3}(x_{N-1}) + c_{N-2} L_{N-2}(x_{N-1}) + c_{N-1} L_{N-1}(x_{N-1}) + c_N L_N(x_{N-1}) + \\ + \frac{(f'_{N-1} - c_{N-3} L'_{N-3}(x_{N-1}) - c_{N-2} L'_{N-2}(x_{N-1}) - c_{N-1} L'_{N-1}(x_{N-1}) - c_N L'_N(x_{N-1})) L_{N+1}(x_{N-1})}{L'_{N+1}(x_{N-1})} = f_{N-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом уравнений (11) в модифицированном виде алгебраическая система уравнений (8), состоящая из упорядоченных и гладко состыкованных между собой наборов кусочных многочленов Лагранжа, примет вид:

$$\left. \begin{aligned} c_1 \left[L_1(x_2) - \frac{L'_1(x_2)}{L'_0(x_2)} L_0(x_2) \right] + c_2 \left[L_2(x_2) - \frac{L'_2(x_2)}{L'_0(x_2)} L_0(x_2) \right] + c_3 \left[L_3(x_2) - \frac{L'_3(x_2)}{L'_0(x_2)} L_0(x_2) \right] + \\ + c_4 \left[L_4(x_2) - \frac{L'_4(x_2)}{L'_0(x_2)} L_0(x_2) \right] = f_2 - \frac{f'_2}{L'_0(x_2)} L_0(x_2); \\ c_{i-2} L_{i-2}(x_i) + c_{i-1} L_{i-1}(x_i) + c_i L_i(x_i) + c_{i+1} L_{i+1}(x_i) + c_{i+2} L_{i+2}(x_i) = f_i, \quad i = 3, \dots, N-2; \\ c_{N-3} \left[L_{N-3}(x_{N-1}) - \frac{L'_{N-3}(x_{N-1})}{L'_{N+1}(x_{N-1})} L_{N+1}(x_{N-1}) \right] + c_{N-2} \left[L_{N-2}(x_{N-1}) - \frac{L'_{N-2}(x_{N-1})}{L'_{N+1}(x_{N-1})} L_{N+1}(x_{N-1}) \right] + \\ + c_{N-1} \left[L_{N-1}(x_{N-1}) - \frac{L'_{N-1}(x_{N-1})}{L'_{N+1}(x_{N-1})} L_{N+1}(x_{N-1}) \right] + c_N \left[L_N(x_{N-1}) - \frac{L'_N(x_{N-1})}{L'_{N+1}(x_{N-1})} L_{N+1}(x_{N-1}) \right] = \\ = f_{N-1} - \frac{f'_{N-1}}{L'_{N+1}(x_{N-1})} L_{N+1}(x_{N-1}). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Вычисление линейных функционалов из выражения (1) предполагает решение системы линейных алгебраических уравнений в матричном исчислении (13). Интерполяционная матрица (13) имеет пятидиагональную структуру, что служит гарантией того, что применяемый алгоритм является устойчивым. Матрицы с диагональным преобладанием всегда не вырождены, а, следовательно, математическая формализация (13) имеет стабильное решение [15]. Впрочем, сплайновым расчетом можно пользоваться и при отсутствии диагонального преобладания, но уже без полной уверенности в конечном успехе математических действий. Кроме того, диагональное преобладание теоретически обосновывает существование и единственность интерполанта с позиций теории сплайн-функций. Метод исключения Гаусса реализуется по более простым формулам метода прогонки с учетом феномена пятидиагональности [13]. Алгоритм прогонки корректен для матрицы с пятидиагональным преобладанием из системы уравнений (13) в том смысле, что все математические действия, связанные с их осуществлением, практически выполнимы, т. е. знаменатели в формулах нигде не обращаются в ноль. Необходимо отметить еще одно важное обстоятельство: алгоритм прогонки устойчив [16], т. е. модули прогоночных коэффициентов не превосходят единицы, вследствие чего не происходит прогрессивного роста погрешности вычислений.

Восстановление выпуклой оболочки навигационного поля математически реализуется за счет умножения узловых значений базисных финитных функций и сплайновых аналогов Лагранжа на искомые, согласно методу наименьших квадратов, линейные функционалы при финальном суммировании полученных компонент на каждом выбранном сеточном патче в рамках одного гибридного алгоритма [6].

Клетки блочных матриц H_1 и H_2 непосредственно формируются множителями Лагранжа $L_{g,k+1}(\varphi_q)$ и $L_{h,m+1}(\lambda_r)$ по координатам φ и λ соответственно [6], альтернативно участвуя в вычислительных реализациях гибридного алгоритма аппроксимации навигационной изоповерхности синхронизированно с матрицами коэффициентов двумерного базисного сплайна:

$$H_1 = \begin{bmatrix} L_{-k,k+1}(\varphi_1) & \dots & L_{g,k+1}(\varphi_1); \\ L_{-k,k+1}(\varphi_2) & \dots & L_{g,k+1}(\varphi_2); \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{-k,k+1}(\varphi_q) & \dots & L_{g,k+1}(\varphi_q); \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} L_{-m,m+1}(\lambda_1) & \dots & L_{h,m+1}(\lambda_1); \\ L_{-m,m+1}(\lambda_2) & \dots & L_{h,m+1}(\lambda_2); \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{-m,m+1}(\lambda_r) & \dots & L_{h,m+1}(\lambda_r). \end{bmatrix}$$

Геометрическая интерпретация интерполяции фрагмента гипотетической навигационной изоповерхности с использованием сплайнов лагранжева типа наглядно показана в работе [6].

Обсуждение (Discussion)

На основе анализа тестовых экспериментов в данном исследовании был установлен вычислительный факт: по своим значениям скалярные коэффициенты c_i достаточно близки по числовым значениям к текущим значениям измерений навигационной функции f_i . В связи с этим предлагается реализовать оригинальную идею — отождествить разнородные по алгоритмическому назначению величины одной простой композитной формулой: $c_i = f_i$. Арифметическая рокировка множителей c_i с дискретными значениями навигационных параметров f_i автоматически организует интерполяцию модернизированного представления сплайна лагранжева типа благодаря новому осмыслению физической сути интерполяции:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{N+1} f_i L_i(x). \quad (14)$$

Аналогично для базисного сплайна новая идея формализуется следующим образом:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{N+1} f_i B_i(x). \quad (15)$$

Новый взгляд на теорию приближения навигационных функций предлагается называть *локальной интерполяцией* с целью акцентирования внимания на отсутствии необходимости в решении больших систем алгебраических уравнений с существенными вычислительными затратами для нового подхода.

Традиционное B -сплайновое представление [10] необходимо переформатировать для установления логической связи коэффициентов c_j с величинами стандартной разностной аппроксимации:

$$z_i = S(x_i); z'_i = S'(x_i); z''_i = S''(x_i), \quad (16)$$

где $z_j = B_j(x_i); z'_j = B'_j(x_i); z''_j = B''_j(x_i); j = i-1, \dots, i+2$.

В силу finiteness B -сплайна соотношения (16) фактически представляются в модифицированном виде:

$$\left. \begin{aligned} c_{i-1}B_{i-1}(x_i) + c_iB_i(x_i) + c_{i+1}B_{i+1}(x_i) &= z_i; \\ c_{i-1}B'_{i-1}(x_i) + c_iB'_i(x_i) + c_{i+1}B'_{i+1}(x_i) &= z'_i; \\ c_{i-1}B''_{i-1}(x_i) + c_iB''_i(x_i) + c_{i+1}B''_{i+1}(x_i) &= z''_i. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Система (17) относительно неизвестных c_{i-1}, c_i, c_{i+1} независимо от равномерности сетки всегда имеет решение. В частности, сплайновые коэффициенты упрощенно можно рассчитать по явной формуле следующим образом:

$$c_i = z_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} z'_i - \frac{h_i - h_{i-1}}{6} z''_i, \quad (18)$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$ — i -й шаг сетки;

i — 1-й шаг сетки $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$.

Таким образом, если известны величины z_i, z'_i, z''_i , то коэффициенты базисного сплайна могут быть получены по явным формулам [18]. Способ расчета сплайновых коэффициентов с использованием системы (17), с одной стороны, является несколько усложненным, но, с другой стороны, представляет более надежный математический метод. В экстремальных случаях интерполяционная матрица системы (12) может и не иметь диагонального преобладания. В аналогичных случаях матрицы для нахождения значений z'_i или z''_i всегда можно представить с диагональным преобладанием [5]. Поэтому имеет смысл в проблемной ситуации вначале получить z'_i или z''_i , а затем по явным формулам (18) рассчитать коэффициенты c_i . Возникает вопрос: *какие положительные свойства локальной аппроксимации можно однозначно идентифицировать с позиций нового подхода к задаче интерполяции навигационных функций?*

Во-первых, из самой сути сплайна сохраняется условие успешности дифференцирования до непрерывности второй производной с обеспечением максимальной гладкости, что, безусловно, оказывает влияние на геометрическую плавность сплайн-функций, находящихся в зависимости от значений их вторых производных. Кроме того, при построении сплайнов привлекается дополнительная информация о навигационной функции в виде значений ее производных на границах сеточного сегмента интерполяции (8), что обеспечивает формирование «плавности» сплайна. Имеются в виду так называемые *естественные краевые условия*, которые задают математический аналог механического напряжения всей «склеенной» конструкции. Без задания граничных условий алгоритмически не обойтись, так как математическое освобождение сплайна перестает влиять на максимальную «гладкость» восполняемых навигационных изолиний.

Во-вторых, локальная аппроксимация точна на многочленах до третьей степени включительно: если функция f_i принадлежит значениям какого-либо многочлена, то сплайн должен совпасть с этим многочленом [5].

В-третьих, главным свойством локальной аппроксимации является *эффект математического сглаживания*, т. е. локальный сплайн способен «подавить» шумовые всплесковые осцилляции погрешностей измерительных данных. При этом локальный сплайн близок к интерполяционному

сплайну, но с ним точно не совпадает. При условии применения простой формулы: $c_i = f_i$, возникают эффекты приближения локального сплайна к интерполяционному, что в целом делает картину аппроксимации более гладкой. Величина уклонения локального сплайна, как правило, зависит от математического характера навигационной функции.

Таким образом, главное достоинство локальных сплайнов заключается в том, что для их конструирования нет необходимости в решении алгебраических систем большой размерности, их коэффициенты вычисляются по простым формулам. В силу этого в вычислительных задачах судовождения экстремальным свойствам локальной аппроксимации следует отдать предпочтение в исключительных случаях сложности дискретных измерительных данных. При этом исходная информация подвергается сглаживанию, что может быть важным в случае, когда в измерениях навигационных параметров присутствует всплесковая хаотичная погрешность.

Выводы (Summary)

На основе проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Для эффективного применения прогрессивных алгоритмов интерполяции навигационной функции может стать возможным дополнение интегрированной обработки информации на основе традиционных базисных сплайнов вычислительной процедурой с математическим атрибутом в виде аналоговых сплайнов лагранжева типа.

2. Локальная аппроксимация компромиссным образом манипулирует инвариантными трансформациями между двумя различными сплайновыми представлениями с формированием новой концепции фундаментального сплайна как единого многозвенного атрибута кусочной алгоритмизации при преобразовании одного представления сплайна в другое.

3. Ориентированный на лагранжевы сплайны алгоритм, адекватно описывающий моделируемый навигационный объект, может быть использован в качестве составной части гибридного математического аппарата интерполяции навигационной изоповерхности [6] в виде прикладной паскаль-программы программного обеспечения автоматизированного интегрированного мостика.

4. Оригинальный гибридный подход позволяет унифицировать две различные практические сплайновые конструкции в виде базисных финитных композиций и сплайнов лагранжева типа с целью автоматической адаптации вычислительного модуля к «зашумленным» хаотичными погрешностями измерительных данных.

5. В качестве прикладного программного обеспечения для бортового компьютера апробируется комбинированный метод на основе базисных финитных сплайнов и сплайн-интерполяции кусочными полиномами Лагранжа для решения сложной проблемы судовождения реконструкции геоидной модели земной поверхности с целью достижения абсолютной точности навигации. По результатам проведенного тестового эксперимента точность расчета числового массива геоидных поправок на основном поле вычислений обеспечивается в алгоритмических пределах 10^{-6} – 10^{-8} м, и только в четырех концевых позициях задания краевых условий интерполяции наблюдается снижение точности до 10^{-2} – 10^{-3} м [18].

6. На основе разработанного гибридного алгоритма выполнен компьютерный эксперимент моделирования фрагментов электронного профиля геоида разных ракурсов в мультипликативном режиме. Геометрическая интерпретация вычислительных реализаций алгоритма сплайн-интерполяции апробируется построением на дисплее компьютера электронных перспектив геоида с целью демонстрации работоспособности предлагаемого математического аппарата [18].

7. Авторский алгоритм может быть использован на микропроцессорном уровне в перспективных спутниковых приемоиндикаторах или в электронных векторных картографических системах с целью реализации в практике судовождения преимуществ, следующих из его применения.

8. Апробирование сплайнов лагранжева типа в судовождении может быть ориентировано на долгосрочную научную перспективу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sayevand K.* Cubic B-spline collocation method and its application for anomalous fractional diffusion equations in transport dynamic systems / K. Sayevand, A. Yazdani, F. Arjang // *Journal of Vibration and Control*. — 2016. — Vol. 22. — Is. 9. — Pp. 2173–2186. DOI: 10.1177/1077546316636282.
2. *Iqbal M. K.* New Cubic B-spline Approximation for solving Non-linear Singular Boundary Value Problems Arising in Physiology / M. K. Iqbal, M. Abbas, N. Khalid // *Communications in Mathematics and Applications*. — 2018. — Vol. 9. — № 3. — Pp. 377–392. DOI: 10.26713/cma.v9i3.802.
3. *Попов А. И.* Применение финитных базисных сплайнов при восстановлении сигналов электрогастроэнтерографии / А. И. Попов, С. Ф. Свинын // *Труды СПИИРАН*. — 2017. — № 1(50). — С. 93–111. DOI: 10.15622/sp.50.4.
4. *Tok Onarcan A.* Trigonometric cubic B-spline collocation algorithm for numerical solution reaction-diffusion equation systems / A. Tok Onarcan, N. Adar, I. Dag // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2018. — Vol. 37. — Is. 5. — Pp. 6848–6869. DOI: 10.1007/s40314-018-0713-4.
5. *Kvasov B. I.* *Methods of Shape-Preserving Spline Approximation*. — Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000. — 338 p.
6. *Ююкин И. В.* Модификация метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации навигационной изоповерхности / И. В. Ююкин // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2019. — Т. 11. — № 4. — С. 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
7. *Гагарский Д. А.* *Электронные картографические системы в современном судовождении*. — СПб.: ГМА им. адм. С. О. Макарова, 2007. — 124 с.
8. *Kvasov B. I.* Approximation by Lagrange splines / B. I. Kvasov, A. Luadsong // *Proceedings of the Fourth Annual National Symposium on Computational Science and Engineering*. — Bangkok: Kasetsart University, 2000. — Pp. 303–315.
9. *Богданов В. В.* Условия формосохранения при интерполяции кубическими сплайнами / В. В. Богданов, Ю. С. Волков // *Математические труды*. — 2019. — Т. 22. — № 1. — С. 19–67. DOI: 10.33048/mat-trudy.2019.22.102.
10. *Ююкин И. В.* Оптимизация моделирования навигационной изоповерхности методами базисных финитных сплайнов / И. В. Ююкин // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2019. — Т. 11. — № 2. — С. 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.
11. *Dem'yanovich Yu. K.* Realization of the spline-wavelet decomposition of the first order / Yu. K. Dem'yanovich, A. S. Ponomarev // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2017. — Vol. 224. — Is. 6. — Pp. 833–860. DOI: 10.1007/s10958-017-3454-9.
12. *Ююкин И. В.* Сплайн-интерполяция навигационных изолиний / И. В. Ююкин // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2019. — Т. 11. — № 6. — С. 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
13. *Dem'yanovich Yu. K.* Adaptive Wavelet Decomposition of Matrix Flows / Yu. K. Dem'yanovich, V. G. Degtyarev, N. A. Lebedinskaya // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2018. — Vol. 232. — Is. 6. — Pp. 816–829. DOI: 10.1007/s10958-018-3911-0.
14. *Dem'yanovich Yu. K.* Two-sided estimates of some coordinate splines / Yu. K. Dem'yanovich, D. M. Lebedinskii, N. A. Lebedinskaya // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2016. — Vol. 216. — Is. 6. — Pp. 770–782. DOI: 10.1007/s10958-016-2941-8.
15. *Khalid N.* A numerical algorithm based on modified extended B-spline functions for solving time-fractional diffusion wave equation involving reaction and damping terms / N. Khalid, M. Abbas, M. K. Iqbal, D. Baleanu // *Advances in Difference Equations*. — 2019. — Vol. 2019. — Is. 1. — Pp. 378. DOI: 10.1186/s13662-019-2318-7.
16. *Makarov A. A.* On two algorithms of wavelet decomposition for spaces of linear splines / A. A. Makarov // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2018. — Vol. 232. — Is. 6. — Pp. 926–937. DOI: 10.1007/s10958-018-3920-z.
17. *Makarov A. A.* On functionals dual to minimal splines / A. A. Makarov // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2017. — Vol. 224. — Is. 6. — Pp. 942–955. DOI: 10.1007/s10958-017-3464-7.
18. *Ююкин И. В.* Алгоритмизация навигационных задач на основе методов кусочных аппроксимаций: автореф. дис. ... канд. техн. наук / И. В. Ююкин. — Л., 1991. — 22 с.

REFERENCES

1. Sayevand, Khosro, Allah Yazdani, and Fatemeh Arjang. "Cubic B-spline collocation method and its application for anomalous fractional diffusion equations in transport dynamic systems." *Journal of Vibration and Control* 22.9 (2016): 2173–2186. DOI: 10.1177/1077546316636282.
2. Iqbal, Muhammad K., Muhammad Abbas, and Nauman Khalid. "New Cubic B-spline Approximation for solving Non-linear Singular Boundary Value Problems Arising in Physiology." *Communications in Mathematics and Applications* 9.3 (2018): 377–392. DOI: 10.26713/cma.v9i3.802.
3. Popov, Aleksandr Igorevich, and Sergey Fedorovich Svinyin. "Application of Finite Basis Splines in Reconstructing Electrogastroenterography Signals." *SPIRAS Proceedings* 1(50)(2017): 93–111. DOI: 10.15622/sp.50.4.
4. Tok Onarcan, Aysun, Nihat Adar, and Idiris Dag. "Trigonometric cubic B-spline collocation algorithm for numerical solution reaction-diffusion equation systems." *Journal of Computational and Applied Mathematics* 37.5 (2018): 6848–6869. DOI: 10.1007/s40314-018-0713-4.
5. Kvasov, Boris I. *Methods of Shape-Preserving Spline Approximation*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.
6. Yuyukin, Igor V. "Modification of the least squares method for spline approximation of navigational isosurface." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 11.4 (2019): 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
7. Gagarskiy, Dmitriy A. *Elektronnyye kartograficheskie sistemy v sovremennom sudovozhdenii*. SPb.: GMA imeni admirala S.O. Makarova, 2007.
8. Kvasov, Boris I., and Anirut Luadsong. "Approximation by Lagrange splines." *Proceedings of the Fourth Annual National Symposium on Computational Science and Engineering*. Bangkok: Kasetsart University, 2000. 303–315.
9. Bogdanov, Vladimir V., and Yuriy S. Volkov. "Usloviya formosohraneniya pri interpolyatcii kubicheskimi splaynami." *Matematicheskie Trudy* 22.1 (2019): 19–67. DOI: 10.33048/mattrudy.2019.22.102.
10. Yuyukin, Igor V. "Optimization of navigational isosurface simulation by the methods of basic finite splines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.2 (2019): 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.
11. Dem'yanovich, Yuri K., and Alexander S. Ponomarev. "Realization of the spline-wavelet decomposition of the first order." *Journal of Mathematical Sciences* 224.6 (2017): 833–860. DOI: 10.1007/s10958-017-3454-9.
12. Yuyukin, Igor V. "Spline interpolation of navigational isolines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 11.6 (2019): 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
13. Dem'yanovich, Yuri K., Valentin G. Degtyarev, and Natalia A. Lebedinskaya. "Adaptive Wavelet Decomposition of Matrix Flows." *Journal of Mathematical Sciences* 232.6 (2018): 816–829. DOI: 10.1007/s10958-018-3911-0.
14. Dem'yanovich, Yuri K., Dmitriy M. Lebedinskii, and Natalia A. Lebedinskaya. "Two-sided estimates of some coordinate splines." *Journal of Mathematical Sciences* 216.6 (2016): 770–782. DOI: 10.1007/s10958-016-2941-8.
15. Khalid, Nauman, Muhammad Abbas, Muhammad K. Iqbal, and Dumitru Baleanu. "A numerical algorithm based on modified extended B-spline functions for solving time-fractional diffusion wave equation involving reaction and damping terms." *Advances in Difference Equations* 2019.1 (2019): 378. DOI: 10.1186/s13662-019-2318-7.
16. Makarov, Anton A. "On two algorithms of wavelet decomposition for spaces of linear splines." *Journal of Mathematical Sciences* 232.6 (2018): 926–937. DOI: 10.1007/s10958-018-3920-z.
17. Makarov, Anton A. "On functionals dual to minimal splines." *Journal of Mathematical Sciences* 224.6 (2017): 942–955. DOI: 10.1007/s10958-017-3464-7.
18. Yuyukin, Igor V. *Algoritimizatsiya navigatsionnykh zadach na osnove metodov kusochnykh approksimatsii*. Abstract of Ph.D. Diss. L., 1991.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ююкин Игорь Викторович —
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: enigma_777@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yuyukin, Igor V. —
PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: enigma_777@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 22 ноября 2019 г.

Received: November 22, 2019.