

**GEOID APPROXIMATION BY SPLINE FUNCTIONS METHODS****I. V. Yuyukin**Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,  
St. Petersburg, Russian Federation

*The conception of navigational space has been actualized by ship's positioning with three fixed coordinates on the «marine geoid» geodetic base. With the advent of innovative computer technologies becomes possible to refuse from the widely used in navigation the approach of geometric primitivities and to utilize practically such factual attributes as approximated isosurface and interpolated isoline. The mistake of the marine mobile object space-time position arising from the mathematical manipulation of substitution the real complex geoid figure by simple two-axis ellipsoids for avoiding the complexity of the calculation scheme may cause a navigation accident. It is assumed that any illusory representation about the concept of Euclidean space for water transport logistics forms the hidden threat of a mathematically programmed emergency situation. The foreshortened screenshot of synthesized geoid isosurface is shown as the fragment of model of the liquid planet state within the concept of navigation continuum. The issue of the approximation accuracy is investigated in 3D format with a specially organized experiment. It is proposed optimally to take into account dynamically changed the «pear-shaped» Earth with the effects of gravitational pulsating undulations based on the developed hybrid method. With the spline approach, there is no need to change the mathematical apparatus of the «functions-roofs» as such with a real algorithmic possibility of reconstructing the refined Earth gravitational appearance. In modern conditions, a practicing navigator is faced with the need to identify an ellipsoid activated in a satellite equipment with a datum of marine navigation or vector electronic chart. While determining the ship location using traditional methods, the seafarer is obliged to make corrections to the coordinates from the legend of the paper chart if the geodetic systems don't match. It is noted that it becomes possible to solve the problem radically when marine logistics is reoriented to the spline geoid model with the condition that cartography is repurposed on the new mathematical basis. When using the spline model of the geoid, there is a real opportunity to free the watch officer from the routine procedures of transforming coordinates for different ellipsoids. This automatically increases the safety standards of modern navigation. A trivial conversion of coordinates to another geodesic basis creates the probability of a navigation error precedent. When manually correcting electronic charts based on notices to mariners, the transition from the ellipsoid of paper chart to the world ellipsoid is implemented by entering modifications with the reverse sign to the geographical latitude and longitude, which can provoke a navigator's omission with possible serious consequences. With the software implementation of algorithms of the advanced technology of the function approximation theory in the onboard computer, a paradigm of absolute navigational accuracy with the possibility of abstracting from dubious mathematical stylizations is formed.*

*Keywords: navigational space, «pear-shaped» Earth, gravitational geoid undulations, «functions-roofs», paradigm of absolute accuracy.*

**For citation:**

Yuyukin, Igor V. "Geoid approximation by spline functions methods." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.2 (2020): 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.

**УДК 656.61.052 656****АППРОКСИМАЦИЯ ГЕОИДА МЕТОДАМИ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ****И. В. Ююкин**ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация

*Актуализирована концепция навигационного пространства позиционированием судна тремя фиксированными координатами на геодезической основе «морского геоида». С появлением инновационных компьютерных технологий появляется возможность отказаться от повсеместно применяемого в судоходстве подхода геометрических примитивизаций и практически использовать такие фактические атрибуты, как аппроксимированная изоповерхность и интерполированная изолиния. Ошибка простран-*

ственно-временного положения морского подвижного объекта, возникающая при математической манипуляции замещения реальной сложной фигуры геоида простыми двухосными эллипсоидами во избежание сложности схемы вычисления, может явиться причиной навигационной аварийности. Предполагается, что любое иллюзорное представление о концепции евклидова пространства для логистики водного транспорта формирует скрытую угрозу математически запрограммированной аварийной ситуации. Демонстрируется ракурсный скриншот синтезированной геоидной изоповерхности как фрагмента модели жидкого состояния планеты в рамках концепции навигационного континуума. Исследован вопрос точности аппроксимации в 3D формате при специально организованном оригинальном эксперименте. Предлагается оптимальным образом учитывать динамически изменяющуюся грушевидность Земли с эффектами гравитационных пульсирующих ундуляций на основе разработанного гибридного метода. При сплайновом подходе отсутствует необходимость изменения математического аппарата «функций-крыши» как такового при реальной алгоритмической возможности реконструкции уточненного гравитационного облика Земли. В современных условиях практикующий штурман поставлен перед необходимостью идентификации активированного в спутниковом оборудовании эллипсоида с датумом морской навигационной или векторной электронной карты. При определении места судна традиционными способами мореплаватель обязан вводить поправки в координаты с легенды бумажной карты при несовпадении геодезических систем. Отмечается, что решить проблему кардинальным образом становится возможным при переориентировании морской логистики на сплайновую геоидную модель с условием перепрофилирования картографии на новую математическую основу. При использовании сплайновой модели геоида появляется реальная возможность освободить вахтенного помощника от рутинных процедур трансформации координат для различных эллипсоидов, что автоматически повышает стандарты безопасности современного судовождения. Тривиальный пересчет координат на другую геодезическую основу создает вероятность прецедента навигационной ошибки. При ручной корректуре электронных карт по извещениям мореплавателям переход от эллипсоида бумажной карты к мировому эллипсоиду реализуется введением поправок с обратным знаком к географической широте и долготе, что может спровоцировать упущение судоводителя с возможными серьезными последствиями. При программной реализации в бортовом компьютере алгоритмов прогрессивной технологии теории приближения функций формируется парадигма абсолютной точности навигации при возможности абстрагирования от сомнительных математических стилизаций.

*Ключевые слова:* навигационное пространство, «морской геоид», жидкое состояние планеты, грушевидность Земли, гравитационные пульсирующие ундуляции, «функции-крыши», парадигма абсолютной точности.

**Для цитирования:**

Ююкин И. В. Аппроксимация геоида методами сплайн-функций / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 2. — С. 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.

### **Введение (Introduction)**

В настоящее время расчет геоида остается трудной математической задачей [1]–[3]. Гравитационная неравномерность Земли приводит к различной направленности отвесных линий, что в основном определяет неправильную грушевидную форму нашей планеты [4], которую немецкий профессор Иоганн Бенедикт Листинг определил как *геоид* [5] в 1873 г. [6]. Грушевидность Земли, инструментально обнаруженная только в XX в. по результатам гравиметрических спутниковых измерений, интуитивно была предсказана еще в XV в. Христофором Колумбом.

В современной практике судовождения используют двухосный эллипсоид, оптимальным образом ориентированный в форме геоида [7]. При этом фактическое перемещение любого судна происходит в трехмерном навигационном пространстве по эквипотенциальной поверхности земного поля тяжести. Морской подвижный объект движется по водной акватории, визуальной ассоциируемой судоводителем с плоскостным судовождением по прямой аналогии с картинной навигацией по морской навигационной карте. Фактически любой регион плавания является фрагментом реальной поверхности нашей планеты, а следовательно, перемещение судна должно концептуально соотноситься с движением в трехмерном евклидовом пространстве по поверхности среднего уровня вод, мысленно продолженной под материками. Маршрутное плавание, ориентированное на геодезическую основу так называемого «морского геоида» [8], безусловно, необходимо рассматривать геометрически в рамках концепции навигационного пространства. При этом

каждая мгновенная позиция судна в навигационном пространстве фиксируется тремя координатами, а не двумя, как это традиционно принято считать.

Абстрагированная вертикальная координата современного судовождения определяет высотное положение судна как отклонение в данной точке евклидова пространства уровенной изоповерхности геоида от условной стандартизированной сфероидной поверхности. Однако третью координату необходимо использовать в любом случае при заходе или выходе из порта при учете влияния приливо-отливных явлений, определяющих безаварийное прохождение судна в стесненных навигационных обстоятельствах. На практике судоводитель практически учитывает вертикальность позиции судна в традиционном варианте использования таблиц приливов или их электронных аналогов для расчета безопасного запаса глубины под килем. Классические горизонтальные координаты в виде географической широты и долготы обычно ассоциируются с плоскостной навигацией в границах используемой в данный момент морской карты. Но действительное навигационное пространство определяется трехкоординатным позиционированием судна по сложной поверхности геоида. Любое непонимание концепции навигационного пространства может явиться скрытой угрозой возможной математически запрограммированной аварии.

Навигационное пространство характеризуется евклидовой метрикой, практически используемой в судовождении в виде оптимальной траектории из отрезков геодезических линий, кратчайшим образом соединяющих точки маршрутизации судна по изоповерхности геоида. Прямолинейное движение судна по локсодромии на карте в меркаторской проекции является упрощенной геометрией, поэтому стремление к упрощению объясняется сопутствующей причиной применимости в практических целях простого математического аппарата. По условной схеме линеаризации действительную геоидную форму Земли заменяют оптимально подобранной по размерам и ориентировке правильной фигурой с известной формализацией — эллипсоидом вращения [7], затем с учетом искажений переходят к сфере, а от глобуса — к плоскости. Плоская модель навигационного пространства в привычном судоводительском понимании — это морская бумажная карта, которая на протяжении ряда столетий находила традиционное применение для повседневного использования на штурманском столе. Однако все обозначенные геометрические трансформации автоматически накапливают методическую ошибку с возможными серьезными последствиями от ее абстрагирования.

Процесс линеаризации продолжается и в плоскостных границах морской навигационной карты, когда для упрощения процедуры определения места судна фактическую изолинию предлагается заменять в районе счислимой точки обычной прямой линией по *методу линий положения*, так как пересечение двух прямых в одной точке, условно принимаемое за обсервацию, рассчитать математически проще, чем определить точку пересечения двух плоских кривых. Ошибка местоположения от такой геометрической манипуляции потенциально содержит угрозу аварии взамен относительной простоты схемы вычисления.

В условиях современности с появлением инновационных компьютерных технологий появилась реальная возможность отказаться от подхода линеаризации и применять на водном транспорте такие фактические объекты, как *аппроксимированные изоповерхности* [4], [9] и *интерполированные изолинии* [7], [10]. При программной реализации в бортовом компьютере алгоритмов на основе прогрессивной технологии теории приближения функций становится возможным оперировать с абсолютной точностью практической навигации, отказавшись от сомнительных математических стилизаций.

В парадигме практического применения концепции навигационного пространства сформулированы следующие задачи:

1. Алгоритмизация аппроксимации геоидной изоповерхности с позиций гибридного сплайнового подхода.
2. Компьютерное моделирование фрагмента эквипотенциальной поверхности нашей планеты.

## Методы и материалы (Methods and Materials)

В настоящее время известно 170 различных вариантов геодезических систем, и в спутниковом приемнике модели GP-500 японской фирмы Furuno все многообразие эллипсоидов зарезервировано в оперативной памяти с возможностью выбора судоводителем любой геодезической основы элементарным вводом трехзначного кода [11]. Практически у каждой страны, интегрированной в логику международного судоходства, появилось получившее широкую известность нововведение в виде референц-эллипсоида как упрощенной государственной модели геоида с целью репродуцирования морских карт с минимальными искажениями на национальных территориях с учетом специфики географических особенностей.

Показательной является официальная статистика погрешностей, обусловленных различием параметров применяемых многообразий эллипсоидов и результирующего вследствие этого расхождения используемых в математическом обеспечении систем координат спутниковых приемников с системами координат картографических основ путевых карт. Расхождение координат, из-за использования различных эллипсоидов в морях Европы, Южной Азии, Южной Америки и Австралии, составляет 0,1 мили, в водах Северной Америки — 0,25 мили, в водах Японии, Южной и Восточной Африки — 0,4 мили [12]. Погрешность, обусловленная разностью параметров референц-эллипсоидов, может быть обнаружена только апостериорно с помощью оценки точности при нанесении спутниковой обсервации на бумажную карту.

Модель двумерной  $B$ -сплайновой аппроксимации геоидной поверхности в первом приближении реализуется линейной комбинацией [4]:

$$\sum_{i=-k}^{g+k+1} \sum_{j=-m}^{h+m+1} B_{i,k}(\varphi_q) B_{j,m}(\lambda_r) C_{i,j} = F_{q,r} \quad q = 1, \dots, z_1; r = 1, \dots, z_2,$$

где  $z_1, z_2$  — максимальное число дискретных измерений навигационных параметров.

Оптимизированный гибридный алгоритм и геометрическая интерпретация интерполяции фрагмента гипотетической навигационной изоповерхности приводятся в работе [9].

При практическом применении  $B$ -сплайна, обеспечивающего максимальную точность приближения навигационной изоповерхности, необходимо введение дополнительного функционала [9] по методу наименьших квадратов:

$$\sum_{q=1}^g \sum_{r=1}^h \left[ F_{q,r} - \sum_{i=-k}^{g+k+1} \sum_{j=-m}^{h+m+1} B_{i,k}(\varphi_q) B_{j,m}(\lambda_r) C_{i,j} \right]^2 \leq S,$$

где  $S$  — эмпирический параметр сглаживания, определяемый пользователем интуитивно в интерактивном режиме по конечному результату восстановления навигационной изоповерхности.

Эфемерное представление коэффициента  $S$  проявляется в сопоставимости с неким условным ключом, удачно повернув который можно получить удовлетворительную аппроксимацию данных. Процедура оптимального выбора коэффициента  $S$  и объяснение физического смысла данного параметра подробно рассмотрены в работе [9].

## Результаты (Results)

Даже при точном выборе размеров эллипсоида и оптимальном его ориентировании в фигуре геоида максимальные отклонения эквипотенциальной поверхности характеризуются цифрой в пределах 100 м [3], [6] выше и ниже уровня эллипсоида, известные в научных публикациях как *ундуляции геоида* [13]. На физическом уровне такие аномалии объясняются неоднородностями распределения магматических масс в верхней мантии Земли вследствие незначительного ее удаления от океана по сравнению с центром масс нашей планеты [13]. Таким образом, фигура геоида геометрически образно пульсирует и не остается хронологически неизменной за счет постоянной динамики планетарных геологических процессов при учете непрерывного фактора перемещения гравитационных масс внутри Земли.

Одной из аномалий является понижение геоида на 106 м в морской окрестности острова Шри-Ланка [14]. Научное объяснение дефицита гравитационной массы, провоцирующего данный феномен, представляет одну из серьезных проблем современной геодезии. Однако эту проблему геофизикам удалось решить на основе компьютерного моделирования конвективных потоков, циркулирующих в земной мантии [15]. Краткое объяснение проблемы сводится к тому, что раскаленный и более легкий магматический материал поднимается наверх к поверхности, а холодный и более плотный опускается вниз по направлению к центру Земли. Аномалия Индийского океана проявляется за счет избытка в географическом районе горячего магматического вещества [16]. Подобный избыток связан с дрейфом Индии от Африки. Индия, в геологических масштабах удаляясь от Африки, направляет отдельную часть мантийных потоков на восток в центр аномалии в Индийском океане, что объясняет наблюдаемый гравитационный эффект. Гипотеза о движении континентов основывается на объяснении влияния тангенциальных массовых сил в континентальной земной коре, провоцирующего возникновение движения литосферных плит [17]. Другой аномалией является повешение геоида на 85 м [18] в районе Исландии. Диапазон максимальных ундуляций геоида составляет, таким образом, интервал от –106 м до +85 м и по абсолютной величине равен 191 м при рассмотрении отклонений геоида от эллипсоида WGS84 (World Geodetic System 1984) [18].

В современной практике судовождения необходимо акцентировать внимание мореплавателей на географическое нахождение судна в аномальных зонах геоида. Анализ неровностей эквипотенциальной изоповерхности дает основание предполагать вероятность фактора личных ошибок судоводителей при традиционных наблюдениях с использованием средств мореходной астрономии в указанных районах вследствие фактической иллюзорности видимого горизонта, на который ориентирована технология измерения высот небесных светил секстаном.

В настоящее время аномальные зоны геоида находятся под пристальным изучением современной геодезии, используются полномасштабные технические возможности спутниковых альтиметрических наблюдений GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) и GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) [8], организуются морские экспедиции, в которых выполняются географически локальные уточняющие гравиметрические измерения с целью определения реального гравитационного поля Земли. В случае обнаружения расхождений измерительных данных с общепринятой моделью автоматически появится необходимость реконструкции геоида [19]. Эффекты аномальных гравитационных пульсаций геоида оптимальным математическим образом могут учитываться при использовании унифицированного гибридного сплайнового алгоритма без какого-либо алгоритмического переформатирования при исключительной модификации файла исходных данных. На основе новой информации измерений уточненная форма геоида будет пересчитана тем же высокоскоростным методом *B*-сплайнов в комбинации со сплайнами лагранжева типа [7], без каких-либо конструктивных сложностей. В режиме реального времени обновления спутниковой информации появляется возможность использования в практических приложениях уточненной синтезированной изогеометрии геоида.

При алгоритмизации перспективных задач судовождения дополнительно предлагается использовать свойство локальности сплайнов с частичной возможностью организации расчетов по явным формулам [7] в уникальных случаях. Экстремальным свойствам локальной аппроксимации следует отдать предпочтение при исключительной сложности дискретных измерительных данных. При этом спутниковая информация подвергается сглаживанию, что может быть важным, когда в измерениях радионавигационных параметров присутствует хаотичная погрешность. Локальную интерполяцию организует простая математическая перестановка сплайновых линейных функционалов с навигационными параметрами [7]:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{N+1} f_i L_i(x); \quad S(x) = \sum_{i=0}^{N+1} f_i B_i(x).$$

На основе разработанного гибридного алгоритма выполнено компьютерное моделирование фрагмента электронного профиля геоида. Геометрическая интерпретация вычислительных

реализаций алгоритма гибридной сплайн-аппроксимации апробируется построением на дисплее компьютера электронных перспектив геоида в различных ракурсах в мультипликативном режиме с целью демонстрации работоспособности предлагаемого алгоритмизированного аппарата (рис. 1). Графическое воспроизведение каждой изолинии геоидной поверхности означает демонстрацию алгоритмической возможности вычисления мгновенного значения навигационной функции в каждой точке синтезированной линии с последующей пиксельной визуализацией битовой карты матрицы изолинии как частного случая навигационной изоповерхности.

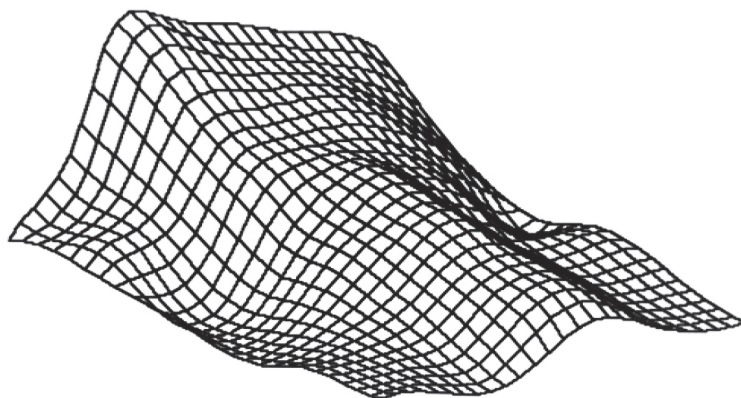


Рис. 1. Скриншот фрагмента электронной перспективы геоидной изоповерхности, синтезированной гибридным двумерным сплайном

Исследован вопрос вычислительной точности комбинированного алгоритма в тестовом эксперименте при решении задачи сплайнового восстановления поверхности сегмента сферы на сеточном патче размером  $30 \times 30$  узловых значений (рис. 2). Сфера выбрана в качестве объекта оригинального исследования по факту представления поверхности постоянной гауссовой кривизны, что обеспечивает возможность получения реалистичных оценок точности сплайн-аппроксимации.

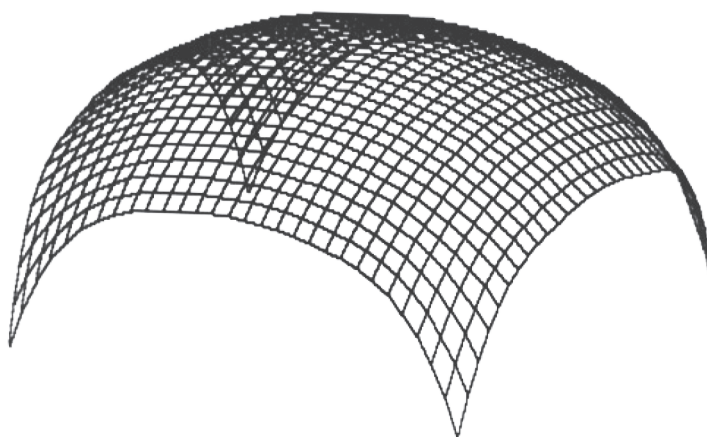


Рис. 2. Скриншот аппроксимированного сплайнового сегмента сферы

Точностные характеристики выводились на компьютерный дисплей при помощи задания в паскаль-программе специального логического условия по расчету абсолютной максимальной разницы между фиксированным значением функции как результата расчета по стандартной формуле сферы и вычислением сплайнового аппроксимированного значения в каждом сеточном узле. По результатам проведенного эксперимента точность расчета на центральной части сферического сегмента обеспечивается в числовом диапазоне  $10^{-6}$ – $10^{-8}$  условных разностных единиц, и только в четырех концевых позициях задания краевых условий (рис. 3) наблюдается

всплесковое повышение погрешности до  $10^{-2}$ – $10^{-3}$  указанных единиц. Полученные результаты оценки точности графически демонстрируются графиком объемной погрешности аппроксимации в перспективном ракурсе (см. рис. 3). Параметр сглаживания  $S$  [9] задавался в данном эксперименте равным 0,5 как интуитивный оптимум, определенный автором в интерактивном режиме.

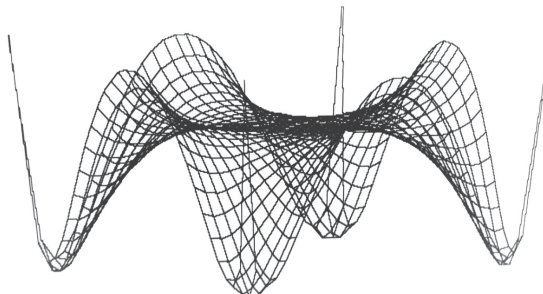


Рис. 3. Скриншот объемной погрешности аппроксимации сферического сегмента двумерным В-сплайном ( $S = 0,5$ )

Поскольку при оптимальном ориентировании эллипсоида вращения в фигуре геоида ундуляции характеризуются цифрой в пределах 100 м [3], представляется возможным оперировать в практических приложениях навигации оценкой точности в метрической системе вычисления геоидной поправки в алгоритмических пределах  $10^{-2}$ – $10^{-8}$  м. На рис. 3 отчетливо различимы четыре характерных всплеска погрешности на концевых участках сферического сегмента, понижающие точность аппроксимации до  $10^{-2}$ – $10^{-3}$  м. Центровка изображений на графических копиях с компьютерного дисплея задается специальными масштабирующими коэффициентами.

### Обсуждение (Discussion)

Многообразие существующих картографических основ усложняет правильный выбор вахтенного помощника и усложняют его обязанность проверки идентичности активированного в спутниковом приемоиндикаторе эллипсоида с легендой бумажной или векторной карты при условии использования электронной картографической навигационно-информационной системы (ЭКНИС). Решить проблему кардинальным образом с целью устранения потенциальной ошибки геодезической основы можно только переходом на сплайновую геоидную модель при обязательном условии перепрофилирования картографии на новую математическую основу. В случае применения в современном судовождении сплайновой модели геоида нивелируется различие систем координат, определяемое разными параметрами эллипсоидов, взятых за математическую основу при производстве бумажной или электронной карты.

В современной навигационной практике судоводитель обязан акцентировать внимание на необходимости ввода поправок в координаты при изучении легенды бумажной карты. Как правило, на карте указываются поправки для перехода от системы координат WGS-84 к системе координат бумажной карты, что позволяет обозначить сравнительно точную спутниковую обсервацию. При этом вахтенный помощник должен удостовериться в использовании эллипсоида WGS-84 в опциях настройки спутникового приемоиндикатора и ЭКНИС.

Штурман поставлен каждый раз во время вахты перед необходимостью установления идентичности активированных в приемоиндикаторе эллипсоида и датума навигационной карты. Ситуация усугубляется тем, что в легенде некоторых бумажных карт дается информация о поправках от отличного WGS-84 эллипсоида. В данном случае необходим детальный анализ получения суммарных поправок или нужна дополнительная информация для перехода от WGS-84 на другой эллипсоид, параметры которого использовались при изготовлении данной бумажной карты. Оптимального эффекта в судовых условиях можно добиться, если изменить настройку приемоиндикатора спутниковой системы на указанный в легенде карты эллипсоид или вводить поправки на основе информации легенды бумажной карты.

### Выводы (Summary)

1. В случае применения геоидной модели апробируется ситуация использования одной сплайновой геодезической модели в различных приложениях в случае переориентации производства компьютерных картографических систем на новую математическую основу. При этом возникает унификация деятельности вахтенного помощника ввиду безаварийной работы в одной математической парадигме при обеспечении абсолютной точности судовождения. Важный результат заключается в возможности значительного сокращения объема необходимой для хранения измерительной информации. При восстановлении навигационной изоповерхности на первый план выступают преимущества нетрадиционных для математических основ судовождения базисных сплайнов по фактору алгоритмической возможности экономии оперативной памяти бортового компьютера. Из-за конструктивной особенности базисной структуры «функций-крыш» [20], объем хранимой навигационной информации сокращается в 4 раза по сравнению, например, с алгоритмом классической полиномиальной сплайн-интерполяции [10].

2. В случае реализации варианта хранения программных модулей в памяти бортовых вычислительных средств обеспечивается преимущество в оперативной возможности корректировки массива данных спутниковых измерений по мере обновления информации. При этом достигается высокая точность пульсирующих вычислений геоидной поправки вследствие возможности использования уточненных измерений контрольных станций спутникового слежения.

3. Способ хранения информации в судовом компьютере исключает проблему модернизации приемоиндикатора навигационной системы при необходимости обновления измерительной информации.

4. Особенная проблематика восстановления геоида заключается в пульсирующей форме уровенной поверхности Земли за счет непрерывных гравитационных флуктуаций. Однако при применении сплайновой аппроксимации нет необходимости переформатировать гибридный алгоритм в случае обнаруженных изменениях формы геоида — обновляется только матрица, сформированная из правых частей системы алгебраических уравнений [9] и на основе прежних формул сплайн-функций синтезируется новый геометрический облик фигуры Земли. Таким образом, разработанный подход является методом многоразового использования с долгосрочной перспективой применения при возможности аппроксимации грушевидной планетарной формы с пульсирующей динамикой.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sanso F.* The geoid today: still a problem of theory and practice / F. Sanso, R. Barzaghi, D. Carrion // VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. — Vol. 137. — Pp. 173–180. DOI: 10.1007/978-3-642-22078-4\_26.
2. *Barzaghi R.* GEOMED2: high-resolution geoid of the mediterranean / R. Barzaghi, D. Carrion, G.S. Vergos, I.N. Tziavos, V.N. Grigoriadis, D. A. Natsiopoulos, S. Bruinsma, F. Reinquin, L. Seoane, S. Bonvalot, M. F. Lequentrec-Lalancette, C. Salaün, O. Andersen, P. Knudsen, A. Abulaitjiang, M. H. Rio // International Symposium on Advancing Geodesy in a Changing World. — Springer, Cham, 2018. — Vol. 149. — Pp. 43–49. DOI: 10.1007/1345\_2018\_33.
3. *Kopeikin S.M.* Reference Ellipsoid and Geoid in Chronometric Geodesy / S.M. Kopeikin // Frontiers in Astronomy and Space Sciences. — 2016. — Vol. 3. — Pp. 5. DOI: 10.3389/fspas.2016.00005.
4. *Ююкин И. В.* Оптимизация моделирования навигационной изоповерхности методами базисных финитных сплайнов / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 2. — С. 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.
5. *Chicaize E. G.* Spatial uncertainty of a geoid undulation model in Guayquil, Ecuador / E. G. Chicaize, C. A. Leiva, J. J. Arranz, X.E. Buenano // Open Geosciences. — 2017. — Vol. 9. — Is. 1. — Pp. 255–265. DOI: 10.1515/geo-2017-0021.

6. Kopeikin S. M. Towards an exact relativistic theory of Earth's geoid undulation / S. M. Kopeikin, E. M. Mazurova, A. P. Karpik // *Physics Letters A*. — 2015. — Vol. 379. — Is. 26–27. — Pp. 1555–1562. DOI: 10.1016/j.physleta.2015.02.046.
7. Ююкин И. В. Интерполяция навигационной функции сплайном лагранжева типа / И. В. Ююкин // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2020. — Т. 12. — № 1. — С. 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.
8. Muller J. High Performance Clocks and Gravity Field Determination / J. Muller, D. Dirkx, S. M. Kopeikin, G. Lion, I. Panet, G. Petit, P. N. A. M. Visser // *Space Sciences Reviews*. — 2018. — Vol. 214. — Is. 1. — Pp. 5. DOI: 10.1007/s11214-017-0431-z.
9. Ююкин И. В. Модификация метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации навигационной изоповерхности / И. В. Ююкин // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2019. — Т. 11. — № 4. — С. 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
10. Ююкин И. В. Сплайн-интерполяция навигационных изолиний / И. В. Ююкин // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2019. — Т. 11. — № 6. — С. 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
11. Furuno operator's manual GPS NAVIGATOR model GP-500. — Nishinomiya: Furuno Electric Co., Ltd., 1989. — 65 p.
12. Рекомендации по организации штурманской службы на судах. — СПб.: ЗАО ЦНИИМФ, 1999. — Вып. № 13. — 152 с.
13. Condie K. C. Earth as an Evolving Planetary System / K. C. Condie. — Elsevier Academic Press, 2015. — 430 p. DOI: 10.1016/C2015-0-00179-4.
14. Ningthoujam L. S. Seismologists Search for the Indian Ocean's "Missing Mass" / L. S. Ningthoujam, S. S. Negi, D. K. Pandey // *Earth & Space Science News*. — 2019. — Vol. 100. DOI: 10.1029/2019EO120243.
15. Ghosh A. The Importance of Upper Mantle Heterogeneity in Generating the Indian Ocean Geoid Low / A. Ghosh, G. Thyagarajulu, B. Steinberger // *Geophysical Research Letters*. — 2017. — Vol. 44. — Is. 19. — Pp. 9707–9715. DOI: 10.1002/2017GL075392.
16. Reiss A. S. A hot midmantle anomaly in the area of the Indian Ocean Geoid Low / A.-S. Reiss, C. Thomas, J. Driel, B. Heyn // *Geophysical Research Letters*. — 2017. — Vol. 44. — Is. 13. — Pp. 6702–6711. DOI: 10.1002/2017GL073440.
17. Rebetsky Yu. L. On small tangential mass forces that may exist in the lithosphere. Their role in tectonics and geodynamics / Yu. L. Rebetsky // *Geodynamics & Tectonophysics*. — 2016. — Vol. 7. — Is. 4. — Pp. 691–704. DOI: 10.5800/GT-2016-7-4-0229.
18. Okiwelu A. A. Determination of Nigerian geoid undulations from spherical harmonic analysis / A. A. Okiwelu, E. E. Okwueze, I. O. Ude // *Applied Physics Research*. — 2011. — Vol. 3. — Is. 1. — Pp. 8–14. DOI: 10.5539/apr.v3n1p8.
19. Kopeikin S. Normal gravity field in relativistic geodesy / S. Kopeikin, I. Vlasov, W. B. Han // *Physical Review D*. — 2018. — Vol. 97. — Is. 4. — Pp. 045020. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.045020.
20. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Б. И. Квасов. — Новосибирск, 1997. — 34 с.

## REFERENCES

1. Sanso, Fernando, Riccardo Barzaghi, and Daniela Carrion. "The geoid today: still a problem of theory and practice." *VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*. Vol. 137. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. 173–180. DOI: 10.1007/978-3-642-22078-4\_26.
2. Barzaghi, R., D. Carrion, G. S. Vergos, I. N. Tziavos, V. N. Grigoriadis, D. A. Natsiopoulou, S. Bruinsma, F. Requin, L. Seoane, S. Bonvalot, M. F. Lequentrec-Lalancette, C. Salaün, O. Andersen, P. Knudsen, A. Abulaitijiang, and M. H. Rio. "GEOMED2: high-resolution geoid of the mediterranean." *International Symposium on Advancing Geodesy in a Changing World*. Vol. 149. Springer, Cham, 2018. 43–49. DOI: 10.1007/1345\_2018\_33.
3. Kopeikin, Sergei M. "Reference Ellipsoid and Geoid in Chronometric Geodesy." *Frontiers in Astronomy and Space Sciences* 3 (2016): 5. DOI: 10.3389/fspas.2016.00005.
4. Yuyukin, Igor V. "Optimization of navigational isosurface simulation by the methods of basic finite splines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.2 (2019): 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.

5. Chicaize, Elena G., Cesar A. Levina, Jose J. Arranz, and Xavier E. Buenano. "Spatial uncertainty of a geoid undulation model in Guayquil, Ecuador." *Open Geosciences* 9.1 (2017): 255–265. DOI: 10.1515/geo-2017-0021.
6. Kopeikin, Sergei M., Elena M. Mazurova, and Alexander P. Karpik. "Towards an exact relativistic theory of Earth's geoid undulation." *Physics Letters A* 379.26-27 (2015): 1555–1562. DOI: 10.1016/j.physleta.2015.02.046.
7. Yuyukin, Igor V. "Interpolation of the navigational function by the Lagrange type spline." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 12.1 (2020): 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.
8. Muller, Jorgen, Dominic Dirkx, Sergei M. Kopeikin, Guillaume Lion, I. Panet, G. Petit, and P. N. A. M. Visser. "High Performance Clocks and Gravity Field Determination." *Space Sciences Reviews* 214.1 (2018): 5. DOI: 10.1007/s11214-017-0431-z.
9. Yuyukin, Igor V. "Modification of the least squares method for spline approximation of navigational isosurface." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 11.4 (2019): 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
10. Yuyukin, Igor V. "Spline interpolation of navigational isolines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.6 (2019): 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
11. *Furuno operator's manual GPS NAVIGATOR model GP-500*. Nishinomiya: Furuno Electric Co., Ltd., 1989.
12. *Recommendations for organization of navigational service*. Is. 13. SPb.: ZAO TSNIIME, 1999.
13. Condie, Kent C. *Earth as an Evolving Planetary System*. Elsevier Academic Press, 2015. DOI: 10.1016/C2015-0-00179-4.
14. Ningthoujam, Lachit S., Sanjay S. Negi, and Dhananjai K. Pandey. "Seismologists Search for the Indian Ocean's "Missing Mass"." *Earth & Space Science News* 100 (2019). DOI: 10.1029/2019EO120243.
15. Ghosh, Attreyee, G. Thyagarajulu, and Bernhard Steinberger. "The importance of upper mantle heterogeneity in generating the Indian Ocean geoid low." *Geophysical Research Letters* 44.19 (2017): 9707–9715. DOI: 10.1002/2017GL075392.
16. Reiss, Anne-Sophie, Christine Thomas, Jac van Driel, and Bjorn Heyn. "A hot midmantle anomaly in the area of the Indian Ocean Geoid Low." *Geophysical Research Letters* 44.13 (2017): 6702–6711. DOI: 10.1002/2017GL073440.
17. Rebetsky, Yuri L. "On small tangential mass forces that may exist in the lithosphere. Their role in tectonics and geodynamics." *Geodynamics & Tectonophysics* 7.4 (2016): 691–704. DOI: 10.5800/GT-2016-7-4-0229.
18. Okiwelu, A. A., E. E. Okwueze, and I. O. Ude. "Determination of Nigerian geoid undulations from spherical harmonic analysis." *Applied Physics Research* 3.1 (2011): 8–14. DOI: 10.5539/apr.v3n1p8.
19. Kopeikin, Sergei, Igor Vlasov, and Wen-Biao Han. "Normal gravity field in relativistic geodesy." *Physical Review D* 97.4 (2018): 045020. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.045020.
20. Kvasov, Boris I. *Metody izogeometricheskoy approksimatsii splaynami*. Abstract of Dr. Diss. Novosibirsk, 1997.

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

**Ююкин Игорь Викторович** — кандидат технических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»  
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7  
e-mail: [enigma\\_777@mail.ru](mailto:enigma_777@mail.ru), [kaf\\_nav@gumrf.ru](mailto:kaf_nav@gumrf.ru)

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Yuyukin, Igor V.** — PhD, associate professor  
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping  
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035, Russian Federation  
e-mail: [enigma\\_777@mail.ru](mailto:enigma_777@mail.ru), [kaf\\_nav@gumrf.ru](mailto:kaf_nav@gumrf.ru)

Статья поступила в редакцию 4 февраля 2020 г.  
Received: February 4, 2020.