

DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-279-288

DESCRIPTION OF THE ROGUE-WAVES MOTION BASED ON 3D NAVIER-STOKES EQUATIONS

A. V. Koptev

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The investigation of rogue-waves which is insufficiently studied for today and present dangerous phenomena for mariners is proposed in the paper. An analytical study of the generation and propagation of such waves based on equations of classical fluid mechanics is presented. The 3D Navier – Stokes equations for the unsteady motion of a viscous incompressible fluid with small Reynolds number are proposed as the original relations. The main unknowns are three components of the velocity vector and pressure. The motion in deep water when the influence of the free surface and boundary conditions can be neglected is considered. The analytical solution method proposed by the author based on the first integral of these equations and the generator of solution built on its basis, is used. It has been shown that within the framework of the assumptions under consideration there are exact solutions of the Navier – Stokes equations which describe deep vortex motion with unlimitedly increasing in time of pressure and velocities. From the theoretical point of view some motions of that type can generate the rogue-waves. To find solutions of that type it is necessary to solve three ordinary differential equations of the first order and to solve a system of nonlinear algebraic equations of the fourth order. Two solutions constructed in this way are considered in the paper and their main properties are analyzed. It has been shown that as a result of this type of motion and under certain initial conditions the rogue-waves most likely occur. In this case the properties of viscosity and the three-dimensional nature of the motion are decisive. The approximate estimates for the area where waves reach the free surface and ratio that determines the wave profile are obtained.

Keywords: ship, rogue- wave, viscous incompressible fluid, unsteady motion, Navier – Stokes equation, integral, direction vector, increase decrement, pressure, free surface, wave profile.

For citation:

Koptev, Alexandr V. "Description of the rogue-waves motion based on 3D Navier-Stokes equations." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.2 (2020): 279–288. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-279-288.

УДК 532.5.032:532.592

ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЛН-УБИЙЦ НА ОСНОВЕ 3D УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

А. В. Коптев

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе предложено исследование волн-убийц — одного из мало изученных и опасных явлений, с которым встречаются мореплаватели. Представлено аналитическое исследование зарождения и распространения таких волн на основе классических уравнений гидромеханики. В качестве исходных соотношений предлагаются 3D уравнения Навье – Стокса для неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости при небольших по величине числах Рейнольдса. Основными неизвестными являются три компонента вектора скорости и давление. Предлагается рассмотрение движения в глубокой воде, когда влиянием свободной поверхности и граничных условий можно пренебречь. Для решения исходных уравнений используется предложенная автором методика решения уравнений Навье – Стокса, основанная на первом интеграле этих уравнений и построенном на его основе генераторе решений. Показано, что в рамках рассматриваемых предположений существуют точные решения уравнений Навье – Стокса, описывающие глубинные вихревые движения с неограниченно возрастающим во времени давлением и скоростями. Некоторые из таких движений теоретически могут порождать волны-убийцы. В этом случае необходимо решить три обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка и систему нелинейных

алгебраических уравнений четвертого порядка. Рассмотрены два построенных таким образом решения, проанализированы их основные свойства и произведено сравнение гидромеханических характеристик. Показано, что при движениях такого типа при определенных начальных условиях наиболее вероятно возникновение волн-убийц. При этом отмечается, что определяющими являются свойства вязкости среды и трехмерный характер движения. Получены приближенные оценки для области выхода волны на поверхность и выражение для определения профиля волны.

Ключевые слова: судно, волна-убийца, вязкая несжимаемая жидкость, неустановившееся движение, уравнение Навье – Стокса, интеграл, направляющий вектор, декремент возрастания, давление, свободная поверхность, профиль волны.

Для цитирования:

Коптев А. В. Описание движения волн-убийц на основе 3D уравнений Навье – Стокса / А. В. Коптев // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 2. — С. 279–288. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-279-288.

Введение (Introduction)

Волны-убийцы (Rogue-Waves or Monster-Waves) — одно из наиболее опасных явлений, с которыми встречаются мореплаватели. Такие волны представляют большую опасность для всех видов судов, от небольших яхт до контейнеровозов и супертанкеров. Волны-убийцы, которые могут достигать до 30 м высотой, обладают огромной разрушительной силой и нередко приводят к катастрофам [1]–[4]. Часто волны-убийцы возникают совершенно неожиданно, без каких бы то ни было предшествующих изменений погодных условий и штормовой обстановки. По свидетельству очевидцев, такие волны нередко возникают как бы ниоткуда, обрушивая свою разрушительную силу на проходящие мимо суда.

Всестороннее изучение природы таких волн является одной из важных и актуальных проблем. Важно понять причины образования таких волн, дать прогноз времени и места возникновения, смоделировать параметры и степень воздействия на судно. Следует выделить три основных аспекта изучения проблемы. Первый — это этап зарождения. На этом этапе важно выявить причины, условия и теоретически объяснить механизм образования таких волн. Второй — этап эволюции или движения волны. На данном этапе важно оценить, в каком направлении движется волна и как изменяются во времени и пространстве ее параметры. Целью третьего этапа является прогнозирование возможных ее воздействий на судно. При этом необходимо оценить выходные параметры волны и спрогнозировать место появления, степень повреждений и последствия.

В настоящее время третий этап имеет эмоционально-описательный характер [3], [4] тогда как первые два этапа рассматривались разными авторами, использующими различные подходы. В работах [5], [6] зарождение и эволюция волн-убийц рассматривались на основе уравнений движения идеальной жидкости. Тем самым предполагалось, что эффекты вязкого трения никакой роли в образовании таких волн не играют. В работах [7], [8] рассмотрение основано на уравнениях типа Кортервега-де-Фриза. Тем самым предполагалось, что механизм образования волн-убийц аналогичен механизму образования так называемых *удиненных поверхностных волн*, или *солитонов*. При этом не рассматривалась фаза движения на глубине, предшествующая выходу волны на поверхность и неразрывно связанная с фазой поверхностного движения. В работах [9], [10] предлагалось численное моделирование воздействия 2D профиль судна на основе одной из моделей турбулентности, однако движение волны на глубине не рассматривалось. В работе [11] выполнено исследование высоких поверхностных волн на основе моделирования и лабораторного эксперимента, а также без рассмотрения фазы глубинного движения. Расчет области выхода волны на поверхность в указанных ранее работах не выполнялся, и формирование начального профиля волны не рассматривалось. Исследования, выполненные в указанных ранее работах, не дают ответа на многие конкретные вопросы. В частности, пока нет ответа на вопрос, каким образом движение аккумулируют в себе огромную энергию, так же, как и нет ответа на вопрос, почему наряду с волной в виде гребня может возникать волна в виде впадины, причем тоже огромных размеров. Недостатком является также неполный учет трехмерного характера движения, свойств вязкости окружающей жидкой среды и эволюции таких

волн на глубине. Все это заставляет вновь обращаться к проблеме и искать ответы на поставленные вопросы, используя для исследования новые модели.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Выполнено аналитическое исследование проблемы на основе классических уравнений гидромеханики. За основу предлагается взять 3D уравнения Навье – Стокса для неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости [12], [13]. При сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса эти уравнения адекватно описывают 3D движение жидкой среды при строгом учете эффектов вязкого трения. В безразмерных переменных (при $\rho = 1$) они имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Независимыми переменными в уравнениях (1)–(4) являются пространственные координаты x, y, z и время t . Роль основных неизвестных играют три компонента вектора скорости: u, v, w и давление p . Каждая из этих величин есть некоторая функция четырех переменных: x, y, z, t . Величина Φ представляет заданную функцию потенциала внешних сил, Re обозначает неотрицательный параметр, называемый *числом Рейнольдса*:

$$\text{Re} = \frac{U_0 L_0}{\nu}. \quad (5)$$

Здесь U_0 и L_0 — масштабы скорости и длины соответственно; ν — коэффициент кинематической вязкости.

Основная задача состоит в решении уравнений (1)–(4) и определении основных неизвестных u, v, w, p как функций координат и времени. Для рассматриваемого случая внешней силой является сила тяжести. Направим ось OZ вертикально вверх, полагая на свободной поверхности $z = 0$. Тогда потенциал внешней силы определяется выражением $\Phi = -gz$, где g — безразмерное ускорение свободного падения.

В целях упрощения дальнейшего исследования предлагается использовать не уравнения (1)–(4) непосредственно, а первый интеграл этих уравнений, ранее полученный в работах [14]–[16]. Для общего случая 3D неустановившегося движения вязкой несжимаемой среды в безразмерных переменных интеграл задается следующими девятью взаимосвязанными соотношениями:

$$p - p_0 + \Phi + \frac{U^2}{2} + d + d_t = \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4; \quad (6)$$

$$u^2 - v^2 + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi_5 + \Psi_6)}{\partial z} \right] + 3(\alpha_4 - \beta_4); \quad (7)$$

$$v^2 - w^2 + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial z^2} -$$

$$- \frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial(\Psi_1 + \Psi_2)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_6}{\partial z} \right] + 3(\beta_4 - \gamma_4); \quad (8)$$

$$uv - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial (\Psi_8 + \Psi_9)}{\partial z} \right] + \frac{1}{2} (\alpha'_{1z} - \alpha'_{3t} + \beta'_{1z} - \beta'_{2t}); \quad (9)$$

$$uw - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial y \partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} - \frac{\partial (\Psi_9 - \Psi_7)}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right] + \frac{1}{2} (-\alpha'_{1y} - \alpha'_{2t} + \gamma'_{1y} - \gamma'_{3t}); \quad (10)$$

$$vw - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial x \partial z} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (\Psi_7 + \Psi_8)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right] - \frac{1}{2} (\beta'_{1x} + \beta'_{3t} + \gamma'_{1x} + \gamma'_{2t}); \quad (11)$$

$$u = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_7}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi_8}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_5}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{2} (\alpha'_{2z} + \alpha'_{3y} + \delta'_{1y} + \delta'_{2z}); \quad (12)$$

$$v = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_7}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi_9}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{2} (\beta'_{2x} + \beta'_{3z} - \delta'_{1x} + \delta'_{3z}); \quad (13)$$

$$w = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_8}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi_9}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{2} (\gamma'_{2y} + \gamma'_{3x} - \delta'_{2x} - \delta'_{3y}). \quad (14)$$

Уравнения (6)–(14) связывают основные неизвестные: u , v , w , p , ассоциированные неизвестные Ψ_i , возникающие при интегрировании, и произвольные функции переменных α_j , β_j , γ_j , δ_j . Для функций α_j , β_j , γ_j , δ_j выполняются равенства:

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x} = \frac{\partial \beta_j}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_j}{\partial z} = \frac{\partial \delta_j}{\partial t} = 0.$$

Кроме указанных величин в соотношении (6) присутствуют также p_0 , U , d , d_t . Первая из указанных величин представляет аддитивную постоянную давления, другие — определены равенствами:

$$U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}; \quad d_t = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial (\Psi_2 - \Psi_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\Psi_4 - \Psi_3)}{\partial y} + \frac{\partial (\Psi_6 - \Psi_5)}{\partial z} \right); \quad (15)$$

$$d = -\frac{U^2}{6} - \frac{1}{3} \left(\Delta_{xy} \Psi_{10} - \Delta_{xz} \Psi_{11} + \Delta_{yz} \Psi_{12} + \frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial y \partial z} \right). \quad (16)$$

Символами Δ_{xy} , Δ_{xz} , Δ_{yz} в равенстве (16) обозначены неполные операторы Лапласа по координатам:

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \Delta_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \Delta_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Следует обратить внимание на характерные особенности уравнений (6)–(14). Порядок производных относительно основных неизвестных u , v , w , p в этих уравнениях на единицу меньше их порядка в исходных уравнениях (1)–(4). Налицо наглядное подтверждение свойства интеграла любых дифференциальных уравнений: соотношения, представляющие интеграл, имеют меньший порядок, чем исходные уравнения. Необходимо обратить внимание также на следующий факт. Нелинейные члены в соотношениях (7)–(11) представлены путем квадратичных комбинаций скоростей. С учетом того, что в этих уравнениях присутствуют первые производные u , v , w и некоторые свободные члены, можно справедливо заключить, что каждое из приведенных

соотношений представляет уравнение известного типа, а именно 2D уравнение Риккати. В математическом плане уравнения (6)–(14) являются более простыми, чем исходные уравнения Навье – Стокса (1)–(4). Поэтому дальнейшее рассмотрение предлагается осуществлять на основе уравнений (6)–(14).

Результаты (Results)

Интеграл уравнений Навье – Стокса в виде соотношений (6)–(14) дает возможность построить генератор решений. Описание этой процедуры представлено в работах [15], [16]. С помощью данной методики представляется возможным строить новые решения уравнений Навье – Стокса, причем можно строить решения, обладающие самыми различными свойствами [17], [18]. Среди множества полученных таким образом решений выделим те, которые описывают движение, характерное для волн-убийц.

Рассмотрим уравнения (6) и (12)–(14), определяющие общую структуру решений [19]. В частности, соотношения (12)–(14) позволяют построить решения, для которых выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_7}{\partial z} &= A(t)e^{n_1x+m_1y+l_1z}; & -\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_8}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} &= B(t)e^{n_2x+m_2y+l_2z}; \\ \frac{\partial \Psi_9}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} &= C(t)e^{n_3x+m_3y+l_3z}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — некоторые функции времени; n_k , m_k , l_k , при $k = 1, 2, 3$ — некоторые вещественные числа, представляющие координаты волновых векторов.

В этом случае неизвестные u , v , w определяются выражениями:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(A(t)m_1e^{n_1x+m_1y+l_1z} + B(t)l_2e^{n_2x+m_2y+l_2z}); & v &= \frac{1}{2}(-A(t)n_1e^{n_1x+m_1y+l_1z} + C(t)l_3e^{n_3x+m_3y+l_3z}); \\ w &= -\frac{1}{2}(B(t)n_2e^{n_2x+m_2y+l_2z} + C(t)m_3e^{n_3x+m_3y+l_3z}). \end{aligned} \quad (18)$$

Данные выражения удовлетворяют уравнению неразрывности (4) и уравнениям (12)–(14). Осталось определить функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и значения $\{n_k, m_k, l_k\}$ так, чтобы были удовлетворены остальные соотношения (6)–(11). Предположения (17) вносят существенные ограничения в указанные величины. В частности, функции времени $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ должны удовлетворять следующим трем обыкновенным дифференциальным уравнениям [14]:

$$\dot{A} - A \frac{(n_1^2 + m_1^2 + l_1^2)}{\text{Re}} = 0; \quad \dot{B} - B \frac{(n_2^2 + m_2^2 + l_2^2)}{\text{Re}} = 0; \quad \dot{C} - C \frac{(n_3^2 + m_3^2 + l_3^2)}{\text{Re}} = 0.$$

Решения этих уравнений определяются в виде

$$A(t) = A_0 e^{\frac{(n_1^2 + m_1^2 + l_1^2)t}{\text{Re}}}; \quad B(t) = B_0 e^{\frac{(n_2^2 + m_2^2 + l_2^2)t}{\text{Re}}}; \quad C(t) = C_0 e^{\frac{(n_3^2 + m_3^2 + l_3^2)t}{\text{Re}}}, \quad (19)$$

где A_0 , B_0 , C_0 — начальные значения функций $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ при $t = 0$.

При этом выполнены следующие условия:

$$A(0) = A_0; \quad B(0) = B_0; \quad C(0) = C_0. \quad (20)$$

В дальнейшем будем полагать A_0 , B_0 , C_0 вещественными числами, заданными изначально. Что касается значений n_k , m_k , l_k , то они должны удовлетворять системе шести алгебраических уравнений. Для определения трех упорядоченных троек чисел (n_k, m_k, l_k) имеем алгебраическую задачу — нужно разрешить систему шести нелинейных алгебраических уравнений относительно девяти неизвестных [16]. Каждое решение системы приводит к точному решению уравнений Навье – Стокса (1)–(4). Предлагается рассмотреть два полученных таким образом решения. В целях удобства дальнейшего аналитического рассмотрения остановимся на новых решениях, которые соответствуют целочисленным значениям n_k , m_k , l_k .

Решение 1. Для первого решения волновые вектора представляются следующими тройками чисел:

$$(1, -2, -1); (-1, -1, -2); (1, 1, 2). \quad (21)$$

Для этого случая соответствующее решение уравнений Навье – Стокса определяется выражениями:

$$\begin{aligned} u &= -e^{\frac{6t}{\text{Re}}} (A_0 e^{x-2y-z} + B_0 e^{-x-y-2z}); \quad v = \frac{1}{2} e^{\frac{6t}{\text{Re}}} (-A_0 e^{x-2y-z} + 2C_0 e^{x+y+2z}); \\ w &= \frac{1}{2} e^{\frac{6t}{\text{Re}}} (B_0 e^{-x-y-2z} - C_0 e^{x+y+2z}); \quad p - p_0 = gz + e^{\frac{12t}{\text{Re}}} \left(\frac{1}{4} A_0 B_0 e^{-3y-3z} - \frac{3}{4} A_0 C_0 e^{2x-y+z} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Решение 2. Для второго решения волновые вектора представляются в виде:

$$(1, -2, -4); (-1, -4, -2); (1, 4, 2). \quad (23)$$

В этом случае решение уравнений Навье – Стокса определяется в виде:

$$\begin{aligned} u &= -e^{\frac{21t}{\text{Re}}} (A_0 e^{x-2y-4z} + B_0 e^{-x-4y-2z}); \quad v = \frac{1}{2} e^{\frac{21t}{\text{Re}}} (-A_0 e^{x-2y-4z} + 2C_0 e^{x+4y+2z}); \\ w &= \frac{1}{2} e^{\frac{21t}{\text{Re}}} (B_0 e^{-x-4y-2z} - 4C_0 e^{x+4y+2z}); \quad p - p_0 = gz + e^{\frac{42t}{\text{Re}}} \left(\frac{1}{4} A_0 B_0 e^{-6y-6z} + 3A_0 C_0 e^{2x+2y-2z} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Путем непосредственной подстановки можно проверить, что выражения (22) и (24) представляют точные решения 3D уравнений Навье – Стокса (1)–(4). Указанные решения являются новыми.

Имея своей целью выявить качественные закономерности, зададим физические характеристики морской воды, а именно плотность и коэффициент кинематической вязкости. При нормальных условиях эти величины определяются значениями

$$\rho = 1,024 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \nu = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Зададим также масштабы скорости и длины, согласовав их с известными описаниями волн убийц [3], [4]. Полагаем $L_0 = 60$ м и $U_0 = 1$ м/с. Тогда масштабы времени и давления получаются, как $T_0 = 60$ с и $P_0 = 1,024 \cdot 10^3$ Н/м². Для числа Рейнольдса в рассматриваемом случае получим значение $\text{Re} = 0,596 \cdot 10^{-4}$. С учетом указанного выбора масштабов отметим некоторые свойства решений уравнений (22) и (24).

1. Все функции, определяющие правые части уравнений (22) и (24), являются возрастающими функциями времени. Этот факт объясняется тем, что множители при t в показателях степени экспонентов положительны. Применяя принятую терминологию, можно констатировать, что декременты возрастания положительны. Для первого решения декремент равен $\frac{6}{\text{Re}}$ для скоростей и $\frac{12}{\text{Re}}$ для давления. Для второго решения $\frac{21}{\text{Re}}$ и $\frac{42}{\text{Re}}$ соответственно. Поскольку для вязкой жидкости $\text{Re} > 0$, все указанные значения заведомо положительны, и функции, фигурирующие в уравнениях (22) и (24), неограниченно возрастают во времени.

Другие свойства предлагается рассмотреть, задавая конкретные значения для начальных условий (20). Положим в качестве примера:

$$A_0 = 2; \quad B_0 = \frac{1}{3}; \quad C_0 = 1. \quad (25)$$

2. Рассмотрим вертикальную скорость $w(x, y, z, t)$. В частности, рассмотрим $w(0, 0, z, t)$ и определим, когда эта величина обращается в нуль. Для пп. 1, на основании третьего из выражений (22), получим

$$e^{\frac{6t}{\text{Re}}} \left(\frac{1}{3} e^{-2z} - e^{2z} \right) = 0.$$

Решение этого уравнения не зависит от t и в результате несложных вычислений получаем $z_0 = -0,275$. В размерных единицах это значение соответствует $-16,48$, т. е. данное значение соответствует точке, находящейся ниже свободной поверхности на глубине около $16,5$ м. Причем в окрестности этой отметки $w(0, 0, z, t)$ имеет противоположные знаки. Эта величина отрицательна выше этой отметки и положительна в обратном случае. Таким образом, вблизи этой точки характер движения будет вихревым.

Для решения пп. 2 ситуация аналогичная. На основании третьего выражения из (24) получаем, что $w(0, 0, z, t) = 0$, когда выполнено условие $\frac{1}{3} e^{-2z} - 4e^{2z} = 0$. Это уравнение имеет единственное решение $z = -0,621$. В размерных единицах данное значение соответствует отметке уровня $-37,27$ м. Выше этой отметки величина $w(0, 0, z, t)$ отрицательна и положительна в обратном случае. Этот эффект усиливается благодаря наличию возрастающего во времени множителя $e^{\frac{2t}{\text{Re}}}$. Так что вблизи значения $z = z_0$ движение имеет выраженный вихревой характер.

3. Рассмотрим выражения для давления, представленные последними формулами в уравнениях (22) и (24). Определим, возможно ли обращение в нуль величины $p(x, y, z, t) - p_0$. Для первого решения равенство $p(x, y, z, t) - p_0 = 0$ при условии (25) приводит к уравнению

$$gz + \frac{1}{2} e^{\frac{12t}{\text{Re}}} \left(\frac{1}{3} e^{-3y-3z} - 3e^{2x-y+z} \right) = 0. \quad (26)$$

Данное уравнение определяет некоторую поверхность, причем поверхность задается неявным образом, поскольку выражения для z как явной функции x и y из уравнения (26) получить нельзя. Однако представляется возможным получить уравнение линии, вдоль которой данная поверхность пересекается с горизонтальной плоскостью $z = 0$. Подставляя $z = 0$ в уравнение (26), приходим к равенству $e^{2x+2y} = \frac{1}{9}$, из которого следует

$$x + y = -1,099. \quad (27)$$

Рассмотрим аналогичный вопрос для пп. 2 решения, определяемого формулами (24). Для этого случая равенство $p(x, y, z, t) - p_0 = 0$ при $z = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{B_0}{12C_0} + e^{2x+8y} = 0.$$

При выборе B_0 и C_0 , в соответствии с уравнением (25), данное уравнение решений не имеет. Таким образом, можно констатировать, что при $z > 0$ уравнение $p(x, y, z, t) - p_0 = 0$ также не имеет решений.

4. Определим область значений x, y, z , когда вертикальная скорость обращается в нуль. Для этого рассмотрим равенство $w(x, y, z, t) = 0$. Для решения пп. 1, когда вертикальная скорость определяется третьей формулой из (22), указанное условие приводит к уравнению

$$\frac{B_0}{C_0} - e^{2x+2y+4z} = 0,$$

откуда получим $x + y + 2z = \frac{1}{2} \ln \frac{B_0}{C_0}$. При условиях (25) правая часть последнего равенства соответствует значению $-0,549$. Таким образом, получаем уравнение плоскости в виде

$$x + y + 2z = -0,549. \quad (28)$$

Вдоль этой плоскости вертикальная скорость изменяет знак. Для точек, расположенных выше данной плоскости, вертикальная скорость отрицательна и, наоборот, вертикальная скорость положительна для всех точек, расположенных ниже плоскости, определяемой уравнением (28). Вдоль данной плоскости образуются вихри. С течением времени вихревой характер движения усиливается благодаря наличию в выражении для $w(x, y, z, t)$ множителя $e^{\frac{6t}{\text{Re}}}$. Причем усиленное

вихреобразование идет из глубины и затрагивает зону, непосредственно примыкающую к поверхности. Обращает на себя внимание следующее обстоятельство: плоскость, вдоль которой вертикальная скорость изменяет знак, параллельна плоскости, задаваемой уравнением (27). Заметим также, что для второго решения при условиях (25) уравнение $w(x, y, z, t) = 0$ решений не имеет, и значит, множества, где вертикальная скорость изменяла бы знак, не существует.

5. Рассмотрим поверхность горизонта $z = 0$ и попытаемся хотя бы приближенно определить область, где наиболее вероятно появление волн-убийц. Такая возможность представляется лишь для решения пп. 1. Рассмотрим равенство (27) и равенство (28) при $z = 0$. В результате на свободной поверхности получаем две прямые, определяемые уравнениями $x + y = -1,009$; $x + y = -0,549$. Данные прямые параллельны и расстояние между ними равно 0,389, что в размерных единицах соответствует 23,32 м. Для всех точек, лежащих в области, ограниченных этими прямыми, разность $p - p_0$ отрицательна, тогда как вертикальная скорость положительна. Третьей границей интересующей нас области на плоскости $z = 0$ является прямая, вдоль которой $v(x, y, 0, t) = 0$. С учетом второй формулы из (22) приходим к уравнению $\frac{A_0}{2C_0} - e^{3y} = 0$, откуда, на основании условий (25), получим $y = 0$. Вдоль линии, определяемой этим уравнением, поперечная скорость изменяет знак. Причем этот эффект, так же, как и в предыдущем случае, многократно усиливается с течением времени благодаря наличию множителей в виде экспонентов с положительными декрементами. Таким образом, для первого решения создаются предпосылки для образования буруна (вертикальной волны больших размеров) внутри области, ограниченной прямыми $x + y = -1,009$, $x + y = -0,549$ и $y = 0$. При решении пп. 2 ничего подобного не возникает ввиду того, что уравнение $p(x, y, 0, t) - p_0 = 0$ решений не имеет.

Зададимся вопросом о профиле волны, возникающей на поверхности в результате движения в соответствии с решением пп. 1. При этом необходимо учесть следующий известный факт: в результате движения свободная поверхность принимает форму, отличную от горизонтальной плоскости $z = 0$. Однако вдоль свободной поверхности выполнено условие [13] $p - p_0 = 0$. Если предположить, что свободная поверхность задается некоторым уравнением $z = h(x, y)$, то для определения правой части достаточно в уравнении (26) принять $z = h$. После несложных преобразований уравнение свободной поверхности принимает вид

$$ghe^{-h} + \frac{1}{6}e^{\frac{12t}{Re}}e^{-3y-4h} - \frac{3}{2}e^{2x-y} = 0. \quad (29)$$

Данное уравнение определяет высоту свободной поверхности $h(x, y)$ над уровнем горизонта как функцию координат x и y . Число Рейнольдса (Re) и безразмерное ускорение свободного падения g являются в уравнении (29) параметрами. Уравнение является трансцендентным и определяет $h(x, y)$ неявным образом для каждого момента времени t . На основании уравнения (29) можно проследить временную эволюцию волны и ее форму.

Обсуждение (Discussion)

Таким образом, классические 3D уравнения Навье – Стокса позволяют описать зарождение и эволюцию волн-убийц. В отличие от исследований [1]–[8], представляется возможным рассмотреть не только поверхностную, но и связанную с ней глубинную фазу движения волны. При этом оказывается возможным рассчитать границы области выхода волны на поверхность и определить профиль волны в каждый момент времени $t > 0$. Из уравнения (29) следует, что величина $h(x, y)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а значит, возможна волна в виде гребня, когда $h(x, y) > 0$, но возможна и волна в виде впадины, когда $h(x, y) < 0$.

В отличие от работ [6]–[8], данное исследование позволяет сделать вывод о том, что при формировании волны-убийцы существенную роль играет трехмерный характер движения и вязкость среды. Именно благодаря свойству вязкости гидромеханические характеристики движения при-

обращают возрастающие во времени экспоненциальные множители с положительными декрементами, зависящими от числа Рейнольдса.

Выводы

1. Рассмотренные в исследовании свойства решений позволяют заключить, что первое решение уравнений Навье – Стокса, задаваемое выражениями (22), соответствует движению жидкой среды, которое теоретически может привести к образованию волн-убийц.

2. Важным фактором для появления волн-убийц на поверхности являются условия (25), а значит, начальные условия для уравнений Навье – Стокса во многом определяют появление волны на поверхности.

3. Второе решение, задаваемое выражениями (24), обладает не всеми свойствами, присущими первому решению, оно не описывает движения с образованием волн-убийц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куркин А. А. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование / А. А. Куркин, Е. Н. Пелиновский. — Н. Новгород: ННГТУ, 2004. — 158 с.
2. Nikolkina I. Rogue waves in 2006-2010 / I. Nikolkina, I. Digenkulova // Natural Hazards & Earth System Sciences. — 2011. — Vol. 11. — Pp. 2913–2924. DOI: 10.5194/nhess-11-2913-2011.
3. Пелиновский Е.Н. “Фрики” – морские волны-убийцы / Е. Н. Пелиновский, А. В. Слюняев // Природа. — 2007. — № 3 (1099). — С. 14–23.
4. Rosenthal W. Rogue-waves: results of the MaxWave Project / W. Rosenthal, S. Lehner // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. — 2008. — Vol. 130. — Is. 2. DOI: 10.1115/1.2918126.
5. Шамин Р. В. О существовании гладких решений уравнений Дзяченко, описывающих неустановившееся течение идеальной жидкости со свободной поверхностью / Р. В. Шамин // Доклады Российской Академии Наук. — 2006. — Vol. 406. — Is. 5. — Pp. 614–615.
6. Шамин Р. В. Математические вопросы волн-убийц / Р. В. Шамин. — М.: Лепард URSS, 2016.
7. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости / В. Е. Захаров // Журнал прикладной механики и технической физики. — 1968. — Т.9. — № 2. — С. 86–94.
8. Kurkina O. E. Structure of currents in the soliton of an internal wave / O. E. Kurkina, A. A. Kurkin, E. N. Pelinovskiy, S. V. Semin, T. G. Talipova // Oceanology. — 2016. — Vol. 56. — № 6. — Pp. 767–773. DOI: 10.1134/S0001437016060072.
9. Дорожко В. М. Опрокидывание контура морского судна волной-убийцей / В. М. Дорожко // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2015. — № 2 (30). — С. 31–41. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-2-31-41.
10. Дорожко В. М. Оценка параметрической области опрокидывания контура морского судна на волне-убийце / В. М. Дорожко // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2016. — № 2(36). — С. 16–26.
11. Saprykina Y. V. Abnormally high waves due to spectral instability of surface waves / Y. V. Saprykina, S. Y. Kuznetsov // Oceanology. — 2016. — Vol. 56. — Is. 3. — Pp. 355–362. DOI: 10.1134/S0001437016030188.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1987. — 833 с.
13. Седов Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. — М.: Наука, 1976. — Т.2. — 573 с.
14. Koptev A. V. Integrals of Motion of an Incompressible Medium Flow. From Classic to Modern / A. V. Koptev // Handbook on Navier – Stokes Equations. Theory and Applied Analysis. — New York: Nova Science Publishers, 2017. — Pp. 443–459.
15. Коптев А. В. Как разрешить 3D уравнения Навье – Стокса / А. В. Коптев // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. — 2015. — № 173. — С. 7–15.
16. Коптев А. В. Точные решения уравнений Навье – Стокса / А. В. Коптев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения-2019. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А. Н. Герцена, 2019. — С. 63–68.
17. Koptev A. V. New Solutions of 2D Navier – Stokes Equations / A. V. Koptev, E.M. Pastushok // American Scientific Journal. — 2017. — Is. 17. — Pp. 4–7.
18. Коптев А. В. Динамические реакции подводного трубопровода на морские течения / А. В. Коптев // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2014. — № 4 (26). — С. 107–114.

19. Koptev A. V. The Structure of Solution of the Navier – Stokes Equations / A. V. Koptev // Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ. — 2014. — Т. 3. — № 6. — С. 656. DOI: 10.1134/S2304487X1406008X.

REFERENCES

1. Kurkin, A. A., and E. N. Pelinovskii. *Volny-ubiitsy: fakty, teoriya i modelirovanie*. N. Novgorod: NNGTU, 2004.
2. Nikol'skaya, I., and I. Didenkulova. "Rogue waves in 2006-2010." *Natural Hazards & Earth System Sciences* 11 (2011): 2913–2924. DOI: 10.5194/nhess-11-2913-2011.
3. Pelinovsky, E. N., and A. V. Slunyaev. "“Freak Waves”, or Sea Killer Waves." *Nature* 3(1099) (2007): 14–23.
4. Rosenthal, Wolfgang, and Susanne Lehner. "Rogue waves: Results of the MaxWave project." *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering* 130.2 (2008). DOI: 10.1115/1.2918126.
5. Shamin, R. V. "On Existence and Unique Smooth Solutions of Dyachenko's Equations Describing Nonstationary Motion of Ideal Liquid with Free Boundary." *Doklady Akademii Nauk* 406.5 (2006): 614–615.
6. Shamin, R. V. *Matematicheskie voprosy voln-ubiits*. M.: Lepard URSS, 2016.
7. Zakharov, V. E. "‘Ustoichivost’ periodicheskikh voln konechnoi amplitudy na poverkhnosti glubokoi zhidkosti." *Zhurnal prikladnoi mekhaniki i tekhnicheskoi fiziki* 9.2 (1968): 86–94.
8. Kurkina, O. E., A. A. Kurkin, E. N. Pelinovskiy, S. V. Semin, and T. G. Talipova. "Structure of currents in the soliton of an internal wave." *Oceanology* 56.6 (2016): 767–773. DOI: 10.1134/S0001437016060072.
9. Dorozhko, V. M. "Capsizing of seagoing vessel contour due to ‘rogue wave’." *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 2(30) (2015): 31–41. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-2-31-41.
10. Dorozhko, Veniamin Mefod'evich. "Estimation of parametric range of capsizing of seagoing vessel contour in ‘rogue wave’." *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 2(36) (2016): 16–26.
11. Saprykina, Ya V., and S. Yu Kuznetsov. "Abnormally high waves due to spectral instability of surface waves." *Oceanology* 56.3 (2016): 355–362. DOI: 10.1134/S0001437016030188.
12. Loitsyanskii, L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. M.: Nauka, 1987.
13. Sedov, L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy*. Vol. 2. M.: Nauka, 1976.
14. Koptev, A. V. "Integrals of Motion of an Incompressible Medium Flow. From Classic to Modern." *Handbook on Navier – Stokes Equations. Theory and Applied Analysis*. New York: Nova Science Publishers, 2017. 443–459.
15. Koptev, Alexander V. "How to Solve 3d Navier - Stokes Equations." *Izvestia: Herzen University Journal of Humanities & Sciences* 173 (2015): 7–15.
16. Koptev, A. V. "Tochnye resheniya uravnenii Nav'e – Stoksa." *Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoi matematiki i matematicheskogo obrazovaniya. Gertsenovskie chteniya - 2019*. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. N. Gertsena, 2019. 63–68.
17. Koptev, A. V., and E. M. Pastushok. "New Solutions of 2D Navier – Stokes Equations." *American Scientific Journal* 17 (2017): 4–7.
18. Koptev, A. V. "Dynamic response of an underwater pipeline on the sea currents." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 4(26) (2014): 107–114.
19. Koptev, Alexander V. "The Structure of Solution of the Navier – Stokes Equations." *Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"* 3.6 (2014): 656. DOI: 10.1134/S2304487X1406008X.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Коптев Александр Владимирович —
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: Alex.Koptev@mail.ru, kaf_math@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Koptev, Alexandr V. —
PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg 198035,
Russian Federation
e-mail: Alex.Koptev@mail.ru, kaf_math@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 25 февраля 2020 г.
Received: February 25, 2020.