

СУДОСТРОЕНИЕ И СУДОРЕМОНТ

DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-347-358

STABILITY OF EXTERNAL CANTILEVER ELEMENTS OF DEEP-SEA VEHICLES

S. O. Baryshnikov, M. V. Sukhoterin, T. P. Knysh

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

In this paper, the deformation of a rectangular cantilever plate under conditions of complex bending, when a uniform transverse load acts on its surface, and a uniform compressive load is applied to the parallel free edges in the plane of the plate, is determined.

Cantilever plates are widely used in aviation, rocket technology, astronautics, military shipbuilding, civil engineering (cantilever plates) and other industries. Most often, the plate is loaded with a transverse load (uniform, concentrated, etc.) and under its influence experiences bending deformations. In the cantilever thin external elements of deep-sea vehicles (submarines, deep-sea torpedoes, bathyscaphes), the compressive load from the water pressure in the plate plane, applied to its free edges, can be significant and causes stability loss.

The problem is described by a system of fourth-order partial differential equations with respect to the desired deflection function. As a parameter, the basic bending equation contains a uniformly distributed compressive force. The deflection function is obtained during the iterative process of superposition of the two main correcting functions in the form of hyperbolic-trigonometric series over two coordinates. These functions in turn compensate for the residuals of the boundary conditions from each of them. The criterion for the end of the iterative process is the desire to zero all residuals. The search for the first and subsequent critical loads is carried out by iterating the load value until a new stable form of equilibrium appears. The spectrum of the first few critical loads is given and the corresponding equilibrium forms are presented.

Keywords: Deep-sea vehicles, stability, cantilever plates, iteration process, Fourier series, the critical load, the shape of the equilibrium.

For citation:

Baryshnikov, Sergej O., Mikhail V. Sukhoterin, and Tat'yana P. Knysh. "Stability of external cantilever elements of deep-sea vehicles." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.2 (2020): 347–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-347-358.

УДК 629.12:624.04

УСТОЙЧИВОСТЬ ВНЕШНИХ КОНСОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГЛУБОКОВОДНЫХ АППАРАТОВ

С. О. Барышников, М. В. Сухотерин, Т. П. Кныш

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В данном исследовании определяется деформация прямоугольной консольной пластины в условиях сложного изгиба, когда на ее поверхности действует равномерная поперечная нагрузка, а на параллельных свободных краях приложена равномерная сжимающая нагрузка в плоскости пластины. Консольные пластины широко применяются в различных отраслях техники, в том числе в военном и гражданском судостроении. Отмечается, что чаще всего такие пластины нагружены поперечной нагрузкой (равномерной, сосредоточенной и т. д.), под воздействием которой они испытывают изгибные деформации. В консольных тонких наружных элементах глубоководных аппаратов (подводные лодки, глубоководные торпеды, батискафы) сжимающая нагрузка от давления воды в плоскости пластины, приложенная к ее свободным краям, может быть значительной и вызвать потерю устойчивости. Задача устойчивости описывается в работе системой дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных относительно

искомой функции прогибов. В качестве параметра основное уравнение изгиба содержит равномерно распределенное давление на боковые свободные края пластины. Функция прогибов получена в результате итерационного процесса суперпозиции двух основных исправляющих функций в виде гиперболо-тригонометрических рядов по двум координатам. Эти функции поочередно компенсируют невязки выполнения граничных условий от каждой из них. Критерием окончания итерационного процесса является стремление к нулю всех невязок. Поиск первой и последующих критических нагрузок осуществляется перебором величины нагрузки до появления новой устойчивой формы равновесия. Получен спектр нескольких первых критических нагрузок и представлены соответствующие им формы равновесия.

Ключевые слова: глубоководные аппараты, устойчивость, консольные пластины, итерационный процесс, ряды Фурье, критические нагрузки, формы равновесия.

Для цитирования:

Барышников С. О. Устойчивость внешних консольных элементов глубоководных аппаратов / С. О. Барышников, М. В. Сухотерин, Т. П. Кныш // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 2. — С. 347–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-347-358.

Введение (Introduction)

Консольные пластины прямоугольной (или почти прямоугольной) формы используются в глубоководных аппаратах в качестве стабилизаторов. На пластину в горизонтальном положении действует выталкивающая сила, из-за разности давлений на нижней и верхней поверхностях, которую можно считать равномерно распределенной нагрузкой, приложенной к одной из ее поверхностей. К свободным краям приложена равномерная сжимающая нагрузка в плоскости пластины, которой обычно пренебрегают при небольших глубинах погружения [1]. На больших глубинах сжимающие усилия могут достигать значительной величины и вызывать потерю устойчивости консольного элемента. Если пластина обладает высокой упругостью, то она может быстро пройти критическое состояние, сопровождающееся резким ростом прогибов, и перейти в закритическое состояние к новой устойчивой форме равновесия. Теоретически для абсолютно упругих пластин существует бесконечно большое число критических нагрузок и соответствующих форм равновесия, однако на практике ограничиваются либо поиском только первой (Эйлеровой) критической нагрузки, которую считают разрушающей для пластин из обычных материалов, либо двух-трех последующих для пластин из высокоупругих материалов.

Задачи изгиба и устойчивости консольных пластин являются наименее изученными с точки зрения получения аналитических или численно-аналитических решений, ввиду сложности краевой задачи математической физики. Если решение основного дифференциального уравнения изгиба сравнительно нетрудно найти, то точно удовлетворить всем граничным условиям, содержащим частные производные до третьего порядка включительно, не представляется возможным. Поэтому исследователи разрабатывают различные приближенные методы, точность которых требует специального анализа. Критерием точности является, безусловно, проверка выполнения всех граничных условий, основным из которых является следующее: невязки должны быть достаточно малы, однако именно эта проверка для большинства численных решений (МКЭ, МКР и т. п.) сопряжена с большими трудностями, так как эти методы «работают» с массивами чисел, а не с аналитическими выражениями. Одними из немногих работ, в которых энергетическим методом получены численные результаты для первой критической нагрузки прямоугольной консольной пластины, сжимающейся по свободным краям, являются работы [2], [3], в которых рассматривались различные виды сжимающей нагрузки. В работе [2] распределенная сжимающая нагрузка была приложена лишь к краю, противоположному заделке. В работе [3] сжимались края, перпендикулярные заделке, а край, параллельный ей, был свободен от нагрузки. На поверхности пластины не действовала также поперечная нагрузка. Проблеме устойчивости консольно-защемленной консольной неоднородной пластины в сверхзвуковом потоке газа посвящена статья [4], где собственные числа находились с использованием вариационного принципа Гамильтона и МКЭ.

В работах [5]–[8] исследуется устойчивость защемленной по контуру прямоугольной пластины с использованием гиперголо-тригонометрических рядов по двум координатам. В работах [5]–[7] поперечная нагрузка не рассматривается и проблема сводится к бесконечной однородной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов. В качестве параметра фигурирует сжимающая нагрузка, перебирая величину которой находились критические нагрузки и соответствующие формы равновесия. В работе [8] исследован случай сложного изгиба от поперечной нагрузки и сжатия в плоскости пластины. Задача решалась итерационным методом суперпозиции исправляющих функций, используемым и в настоящей работе. Работы [9], [10] посвящены применению различных энергетических методов для решения задач изгиба и устойчивости прямоугольных пластин.

Целью настоящей работы является разработка эффективного метода численного моделирования устойчивости конструктивных элементов принципиально новых судов и кораблей, в том числе из новых материалов. Задачей исследования является определение спектра критических сжимающих нагрузок и соответствующих форм закритического равновесия внешних прямоугольных консольных элементов глубоководных аппаратов.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Рассмотрим прямоугольную консольную пластину, нагруженную равномерной поперечной нагрузкой интенсивности q_0 и равномерными сжимающими усилиями T_x в плоскости пластины, приложенными к параллельным свободным краям (рис. 1). Сжимающие усилия, которые в реальных условиях приложены к свободному краю, параллельному заделке, в данном случае не учитываются, оставляя эту задачу для дальнейших исследований.

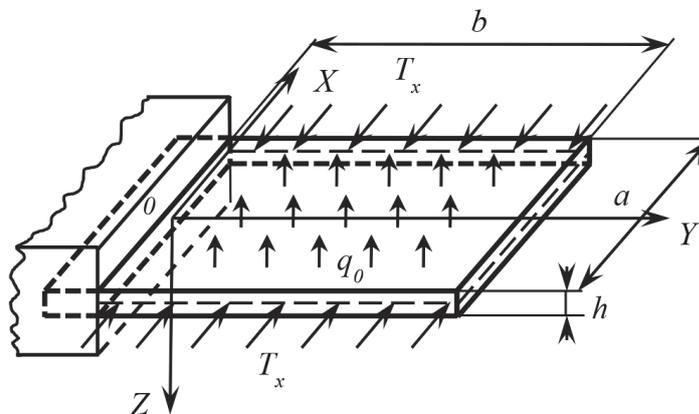


Рис. 1. Консольная пластина в условиях сложной нагрузки

Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины имеет вид [11]:

$$D\nabla^2\nabla^2W + T_x \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = -q_0, \quad (1)$$

где W — прогиб срединной поверхности пластины; $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ∇^2 — двумерный оператор Лапласа.

Заметим, что для растягивающих усилий в уравнении (1) перед вторым слагаемым следует изменить знак. Перейдем к безразмерным координатам $x = X/b$, $y = Y/b$. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\nabla^2\nabla^2w + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -1, \quad (2)$$

где $w = WD/(q_0b^4)$ — относительный прогиб; $T = T_x b^2/D$ — относительные сжимающие усилия, приложенные к параллельным свободным краям.

Относительные размеры пластины будут следующие: $-\gamma/2 \leq x \leq \gamma/2$, $0 \leq y \leq 1$, где $\gamma = a/b$.
Граничные условия [11]:

$$[w]_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0} = 0; \quad (3)$$

$$\begin{cases} [M_y]_{y=1} = - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=1} = 0; \\ [V_y]_{y=1} = - \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=1} = 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} [M_x]_{x=\pm\gamma/2} = - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=\pm\gamma/2} = 0; \\ [V_x]_{x=\pm\gamma/2} = - \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=\pm\gamma/2} = 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$[H_{xy}]_{x=\pm\gamma/2, y=1} = -(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{x=\pm\gamma/2, y=1} = 0. \quad (6)$$

Здесь изгибающие моменты M_x , M_y и крутящий момент H_{xy} отнесены к величине $q_0 b^2$, а перерезывающие силы V_x , V_y — к величине $q_0 b$.

Задача сложного изгиба формулируется следующим образом: найти функцию прогибов $w(x, y)$, удовлетворяющую уравнениям (2)–(6), а также спектр критических усилий T , при которых пластина теряет устойчивость, приобретая затем новые формы равновесия. Заметим, что усилия T в плоскости пластины могут быть и растягивающими. Тогда задача будет более простой, не связанной с потерей устойчивости.

В качестве частного решения дифференциального уравнения (2) возьмем известное «балочное» решение (консольная балка):

$$w_0(y) = -\frac{1}{24}(y^4 - 4y^3 + 6y^2). \quad (7)$$

Эта функция удовлетворяет всем граничным условиям за исключением первого условия (5), т. е. на свободных краях $x = \pm\gamma/2$ дает «невязку» в виде изгибающего момента M_x . Величина этой невязки, которую назовем *начальной*, имеет вид

$$M_{x0} \left(\pm \frac{\gamma}{2}, y \right) = \frac{\nu}{2} (y-1)^2. \quad (8)$$

Ее можно устранить добавлением к балочному решению дополнительной исправляющей функции, которая бы удовлетворяла соответствующему однородному уравнению (2), а также (за счет неопределенных коэффициентов) граничным условиям на краях $x = \pm\gamma/2$, поглощая невязку (8), разложив которую в ряд Фурье по $\sin \lambda_k y$, где $\lambda_k = k\pi/2$, получим::

$$M_{x0} \left(\pm \frac{\gamma}{2}, y \right) = \frac{\nu}{2} (y-1)^2 = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{k0} \sin \lambda_k y. \quad (9)$$

Здесь

$$b_{k0} = \frac{\nu}{\lambda_k} \left(1 - \frac{2}{\lambda_k^2} \right). \quad (10)$$

Первую исправляющую функцию выберем в виде

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \cosh(\alpha_k x) \sin(\lambda_k y). \quad (11)$$

Здесь A_k, α_k — неопределенные коэффициенты.

Необходимо, чтобы ряд (11) удовлетворял однородному дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 w + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (12)$$

Тогда для коэффициентов α_k получим биквадратное уравнение

$$\alpha_k^4 - 2\alpha_k^2 \lambda_k^2 + \lambda_k^4 + T \alpha_k^2 = 0, \quad (13)$$

имеющее четыре корня, из которых, в силу четности гиперболической функции, понадобятся два:

$$\alpha_k = \sqrt{0,5(2\lambda_k^2 - T + \sqrt{T^2 - 4\lambda_k^2 T})}; \quad \beta_k = \sqrt{0,5(2\lambda_k^2 - T - \sqrt{T^2 - 4\lambda_k^2 T})}. \quad (14)$$

С учетом выражений (14) функция (11) примет вид

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} [A_k \cosh(\alpha_k x) + B_k \cosh(\beta_k x)] \sin(\lambda_k y), \quad (15)$$

где неопределенные коэффициенты можно определить при удовлетворении граничным условиям (5) из системы двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_k (\alpha_k^2 - \nu \lambda_k^2) \cosh(\tilde{\alpha}_k) + B_k (\beta_k^2 - \nu \lambda_k^2) \cosh(\tilde{\beta}_k) = b_{k0}; \\ A_k \alpha_k [\alpha_k^2 - (2 - \nu) \lambda_k^2] \sinh(\tilde{\alpha}_k) + B_k \beta_k [\beta_k^2 - (2 - \nu) \lambda_k^2] \sinh(\tilde{\beta}_k) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k \gamma / 2$, $\tilde{\beta}_k = \beta_k \gamma / 2$.

Запишем эти коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\beta_k [\beta_k^2 - (2 - \nu) \lambda_k^2] \sinh(\tilde{\beta}_k) \cdot b_{k0}}{\delta_k}; \\ B_k &= -\frac{\alpha_k [\alpha_k^2 - (2 - \nu) \lambda_k^2] \sinh(\tilde{\alpha}_k) \cdot b_{k0}}{\delta_k}. \end{aligned} \quad (17)$$

В выражениях (17) знаменатель

$$\begin{aligned} \delta_k &= (\alpha_k^2 - \nu \lambda_k^2) \beta_k [\beta_k^2 - (2 - \nu) \lambda_k^2] \cosh(\tilde{\alpha}_k) \sinh(\tilde{\beta}_k) - \\ &- (\beta_k^2 - \nu \lambda_k^2) \alpha_k [\alpha_k^2 - (2 - \nu) \lambda_k^2] \sinh(\tilde{\alpha}_k) \cosh(\tilde{\beta}_k). \end{aligned} \quad (18)$$

Функция $w_1(x, y)$ на краях $y = 0$, $y = 1$ порождает невязки по углу поворота заделанного сечения и по изгибающим моментам на противоположном крае, которые необходимо разложить в ряды Фурье по $\cos \mu_s x$, где $\mu_s = 2\pi s / \gamma$:

$$\vartheta_{y1} |_{y=0} = \frac{\partial w_1}{\partial y} |_{y=0} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k [A_k \cosh(\alpha_k x) + B_k \cosh(\beta_k x)] = \vartheta_1 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \vartheta_{s1} \cos \mu_s x. \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{\sinh(\tilde{\alpha}_k)}{\tilde{\alpha}_k} A_k + \frac{\sinh(\tilde{\beta}_k)}{\tilde{\beta}_k} B_k \right), \\ \vartheta_{s1} &= \frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{\alpha_k \sinh(\tilde{\alpha}_k)}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} A_k + \frac{\beta_k \sinh(\tilde{\beta}_k)}{\beta_k^2 + \mu_s^2} B_k \right). \end{aligned} \quad (20)$$

$$M_{y1} |_{y=1} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left[(\nu \alpha_k^2 - \lambda_k^2) \cosh(\alpha_k x) A_k + (\nu \beta_k^2 - \lambda_k^2) \cosh(\beta_k x) B_k \right] = m_1 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s m_{s1} \cos \mu_s x. \quad (21)$$

Здесь

$$m_1 = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left[(v\alpha_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\sinh(\tilde{\alpha}_k)}{\tilde{\alpha}_k} A_k + (v\beta_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\sinh(\tilde{\beta}_k)}{\tilde{\beta}_k} B_k \right];$$

$$m_{s1} = \frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left[(v\alpha_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\alpha_k \sinh(\tilde{\alpha}_k)}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} A_k + (v\beta_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\beta_k \sinh(\tilde{\beta}_k)}{\beta_k^2 + \mu_s^2} B_k \right]. \quad (22)$$

$$\tilde{k} = (k+1)/2.$$

Эти невязки также следует компенсировать, но поскольку они содержат свободные члены разложения, сначала для их устранения введем дополнительный двучлен:

$$w_1^*(y) = \frac{1}{2} m_1 y^2 - \vartheta_1 y, \quad (23)$$

который, в свою очередь, порождает невязку на краях $x = \pm\gamma/2$:

$$M_{x1}^* \left(\pm \frac{\gamma}{2}, y \right) = -v \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial y^2} = -v m_1. \quad (24)$$

Эту константу следует разложить в ряд Фурье по $\sin \lambda_k y$:

$$M_{x1}^* \left(\pm \frac{\gamma}{2}, y \right) = -v m_1 = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{k1}^* \sin(\lambda_k y), \quad (25)$$

где

$$b_{k1}^* = -\frac{2v m_1}{\lambda_k}.$$

Невязки (19) и (21) в виде рядов будем компенсировать исправляющей функцией второго вида:

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left[C_s \sinh(\xi_s(y-1)) + D_s \sinh(\eta_s(y-1)) \right. \\ \left. + E_s \cosh(\xi_s(y-1)) + F_s \cosh(\eta_s(y-1)) \right] \cos \mu_s x. \quad (26)$$

Здесь C_s, D_s, E_s, F_s — неопределенные коэффициенты, с помощью которых будут удовлетворены граничные условия на краях $y = 0, y = 1$; ξ_s, η_s — неопределенные коэффициенты, которым будет удовлетворять уравнение (12).

Для последних коэффициентов аналогично получаем биквадратные уравнения, аналогичные (13):

$$\xi_s^4 - 2\mu_s^2 \xi_s^2 + \mu_s^4 - T\mu_s^2 = 0, \quad \eta_s^4 - 2\mu_s^2 \eta_s^2 + \mu_s^4 - T\mu_s^2 = 0, \quad (27)$$

решения которых

$$\xi_s = \sqrt{\mu_s^2 + \mu_s \sqrt{T}}, \quad \eta_s = \sqrt{\mu_s^2 - \mu_s \sqrt{T}}. \quad (28)$$

Коэффициенты C_s, D_s, E_s, F_s найдутся из системы четырех уравнений:

$$\begin{cases} C_s \sinh(\xi_s) + D_s \sinh(\eta_s) - E_s \cosh(\xi_s) - F_s \cosh(\eta_s) = 0; \\ C_s \xi_s \cosh(\xi_s) + D_s \eta_s \cosh(\eta_s) - E_s \xi_s \sinh(\xi_s) - F_s \eta_s \sinh(\eta_s) = -\vartheta_{s1}; \\ E_s (\xi_s^2 - v\mu_s^2) + F_s (\eta_s^2 - v\mu_s^2) = m_{s1}; \\ C_s \xi_s [\xi_s^2 - (2-v)\mu_s^2] + D_s \eta_s [\eta_s^2 - (2-v)\mu_s^2] = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Функция (26), в свою очередь, порождает невязки по изгибающему моменту на краях $x = \pm\gamma/2$, которые разложим в ряд Фурье по синусам:

$$M_{x1}\left(\pm\frac{\gamma}{2}, y\right) = -\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_s (\mu_s^2 - \nu \xi_s^2) \sinh(\xi_s (y-1)) + D_s (\mu_s^2 - \nu \eta_s^2) \sinh(\eta_s (y-1)) + E_s (\mu_s^2 - \nu \xi_s^2) \cosh(\xi_s (y-1)) + F_s (\mu_s^2 - \nu \eta_s^2) \cosh(\eta_s (y-1)) \right] = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \tilde{b}_{k1} \sin \lambda_k y, \quad (30)$$

где

$$\tilde{b}_{k1} = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \left[-C_s (\mu_s^2 - \nu \xi_s^2) \frac{(-1)^k \xi_s + \lambda_k \sinh(\xi_s)}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} - D_s (\mu_s^2 - \nu \eta_s^2) \frac{(-1)^k \eta_s + \lambda_k \sinh(\eta_s)}{\lambda_k^2 + \eta_s^2} + E_s (\mu_s^2 - \nu \xi_s^2) \frac{\lambda_k \cosh(\xi_s)}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} + F_s (\mu_s^2 - \nu \eta_s^2) \frac{\lambda_k \cosh(\eta_s)}{\lambda_k^2 + \eta_s^2} \right].$$

Просуммировав теперь невязки (30) и (25), получим

$$M_{x1}^*\left(\pm\frac{\gamma}{2}, y\right) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{k1} \sin(\lambda_k y), \quad (31)$$

где

$$b_{k1} = \tilde{b}_{k1} + b_{k1}^*.$$

И далее процесс повторяется, т. е. вновь привлекается исправляющая функция первого вида, аналогичная (15):

$$w_{12}(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} [A_{k2} \cosh(\alpha_k x) + B_{k2} \cosh(\beta_k x)] \sin(\lambda_k y), \quad (32)$$

где ее коэффициенты будут представлены в виде:

$$A_{k2} = \frac{\beta_k [\beta_k^2 - (2 - \nu) \lambda_k^2] \sinh(\tilde{\beta}_k) \cdot b_{k1}}{\delta_k}; \quad (33)$$

$$B_{k2} = -\frac{\alpha_k [\alpha_k^2 - (2 - \nu) \lambda_k^2] \sinh(\tilde{\alpha}_k) \cdot b_{k1}}{\delta_k}.$$

При заданной сжимающей нагрузке T , не превышающей критическую указанным методом суперпозиции исправляющих функций, можно с высокой точностью найти единственное напряженно-деформированное состояние такой пластины, так как граничные условия задачи на каждой итерации удовлетворяются точно, и дело лишь в погрешностях вычислительного процесса с использованием числовых рядов и рядов Фурье. Однако итерационный процесс можно контролировать на каждом шаге, выводя на печать невязки выполнения граничных условий, которые должны убывать по абсолютной величине, приводя к точному решению задачи. Безусловно сходимость итераций должна быть доказана и аналитически, так же как проанализирована сходимость рядов и пригодность их для практических вычислений. Рост сжимающей нагрузки и приближении ее к критической, безусловно, потребует отдельного анализа влияния параметра нагрузки в опасной зоне.

Приведем сводку формул для организации вычислительного итерационного процесса определения функции прогибов консольной пластины в условиях сложного изгиба:

$$w(x, y) = w_0(y) + \sum_n [w_n^*(y) + w_{1n}(x, y) + w_{2n}(x, y)];$$

$$w_0(y) = -\frac{1}{24}(y^4 - 4y^3 + 6y^2), \quad w_n^*(y) = \frac{1}{2} m_{1n} y^2 - \vartheta_{1n} y;$$

$$w_{1n}(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} [A_{kn} \cosh(\alpha_k x) + B_{kn} \cosh(\beta_k x)] \sin(\lambda_k y), \quad \lambda_k = k\pi/2; \quad (34)$$

$$A_{kn} = \frac{\beta_k [\beta_k^2 - (2-v)\lambda_k^2] \sinh(\tilde{\beta}_k) \cdot b_{k(n-1)}}{\delta_k}, \quad B_{kn} = -\frac{\alpha_k [\alpha_k^2 - (2-v)\lambda_k^2] \sinh(\tilde{\alpha}_k) \cdot b_{k(n-1)}}{\delta_k};$$

$$b_{ko} = \frac{v}{\lambda_k} \left(1 - \frac{2}{\lambda_k^2}\right);$$

$$\delta_k = (\alpha_k^2 - v\lambda_k^2)\beta_k [\beta_k^2 - (2-v)\lambda_k^2] \cosh(\tilde{\alpha}_k) \sinh(\tilde{\beta}_k) - (\beta_k^2 - v\lambda_k^2)\alpha_k [\alpha_k^2 - (2-v)\lambda_k^2] \sinh(\tilde{\alpha}_k) \cosh(\tilde{\beta}_k);$$

$$\alpha_k = \sqrt{0,5(2\lambda_k^2 - T + \sqrt{T^2 - 4\lambda_k^2 T})}; \quad \beta_k = \sqrt{0,5(2\lambda_k^2 - T - \sqrt{T^2 - 4\lambda_k^2 T})}, \quad \tilde{\alpha}_k = \alpha_k \gamma / 2, \quad \tilde{\beta}_k = \beta_k \gamma / 2;$$

$$m_{1n} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left[(v\alpha_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\sinh(\tilde{\alpha}_k)}{\tilde{\alpha}_k} A_{kn} + (v\beta_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\sinh(\tilde{\beta}_k)}{\tilde{\beta}_k} B_{kn} \right];$$

$$\vartheta_{1n} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{\sinh(\tilde{\alpha}_k)}{\tilde{\alpha}_k} A_{kn} + \frac{\sinh(\tilde{\beta}_k)}{\tilde{\beta}_k} B_{kn} \right);$$

$$w_{2n}(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left[\frac{C_{sn} \sinh(\xi_s(y-1)) + D_{sn} \sinh(\eta_s(y-1))}{+E_{sn} \cosh(\xi_s(y-1)) + F_{sn} \cosh(\eta_s(y-1))} \right] \cos \mu_s x, \quad \mu_s = 2\pi s / \gamma;$$

$$\xi_s = \sqrt{\mu_s^2 + \mu_s \sqrt{T}}, \quad \eta_s = \sqrt{\mu_s^2 - \mu_s \sqrt{T}};$$

$$\begin{cases} C_{sn} \sinh(\xi_s) + D_{sn} \sinh(\eta_s) - E_{sn} \cosh(\xi_s) - F_{sn} \cosh(\eta_s) = 0; \\ C_{sn} \xi_s \cosh(\xi_s) + D_{sn} \eta_s \cosh(\eta_s) - E_{sn} \xi_s \sinh(\xi_s) - F_{sn} \eta_s \sinh(\eta_s) = -\vartheta_{sn}; \\ E_{sn} (\xi_s^2 - v\mu_s^2) \cosh(\xi_s) + F_{sn} (\eta_s^2 - v\mu_s^2) \cosh(\eta_s) = m_{sn}; \\ C_{sn} \xi_s [\xi_s^2 - (2-v)\mu_s^2] + D_{sn} \eta_s [\eta_s^2 - (2-v)\mu_s^2] = 0; \end{cases}$$

$$\vartheta_{sn} = \frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{\alpha_k \sinh(\tilde{\alpha}_k)}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} A_{kn} + \frac{\beta_k \sinh(\tilde{\beta}_k)}{\beta_k^2 + \mu_s^2} B_{kn} \right);$$

$$m_{sn} = \frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left[(v\alpha_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\alpha_k \sinh(\tilde{\alpha}_k)}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} A_{kn} + (v\beta_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\beta_k \sinh(\tilde{\beta}_k)}{\beta_k^2 + \mu_s^2} B_{kn} \right], \quad \tilde{k} = (k+1)/2;$$

$$b_{kn} = \tilde{b}_{kn} + b_{kn}^*, \quad b_{kn}^* = -\frac{2vm_{1n}}{\lambda_k};$$

$$\tilde{b}_{kn} = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{-C_{sn} (\mu_s^2 - v\xi_s^2) (-1)^{\tilde{k}} \xi_s + \lambda_k \sinh(\xi_s)}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} - D_{sn} (\mu_s^2 - v\eta_s^2) \frac{(-1)^{\tilde{k}} \eta_s + \lambda_k \sinh(\eta_s)}{\lambda_k^2 + \eta_s^2}; \right. \\ \left. + E_{sn} (\mu_s^2 - v\xi_s^2) \frac{\lambda_k \cosh(\xi_s)}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} + F_{sn} (\mu_s^2 - v\eta_s^2) \frac{\lambda_k \cosh(\eta_s)}{\lambda_k^2 + \eta_s^2} \right].$$

Далее вычисляются коэффициенты A_{k1} , B_{k1} и процесс повторяется. Параметры вычислительного процесса: $\gamma = a/b$; T .

Результаты (Results)

В системе компьютерной математики *Maple* была составлена программа для реализации алгоритма итерационного процесса определения прогибов прямоугольной консольной пластины с помощью приведенных выше формул. Невязки выполнения граничных условий выводились на печать на каждой итерации, что позволяло контролировать процесс и оценить быстроту его сходимости. Программой предусматривалось построение 3D графика изогнутой поверхности пластины. В рядах удерживалось 29 членов. Число циклов — 10. Во всех расчетах коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Для проверки правильности теории и алгоритма программы вычислений начальное значение относительной сжимающей нагрузки было принято достаточно малым, т. е. равным единице.

На рис. 2, а представлена форма квадратной консольной пластины под действием равномерной поперечной нагрузки и равномерной сжимающей относительной нагрузки $T = 1$.

Величины прогибов в контрольных точках: $w(0,1) = -0,13137$, $w(\pm\gamma/2, 1) = -0,12951$. Для сравнения приведем аналогичные значения прогибов без сжимающей нагрузки $w(0,1) = -0,12907$, $w(\pm\gamma/2, 1) = -0,12724$, полученные в работе [12]. Эти значения близки. С ростом сжимающей нагрузки в первой зоне устойчивого равновесия $0 < T < 43,75$ росли прогибы (см. 2, б) с сохранением формы, а затем, после $T = 40$, стал наблюдаться перегиб поверхности (см. рис. 2, в при $T = 43,745$).

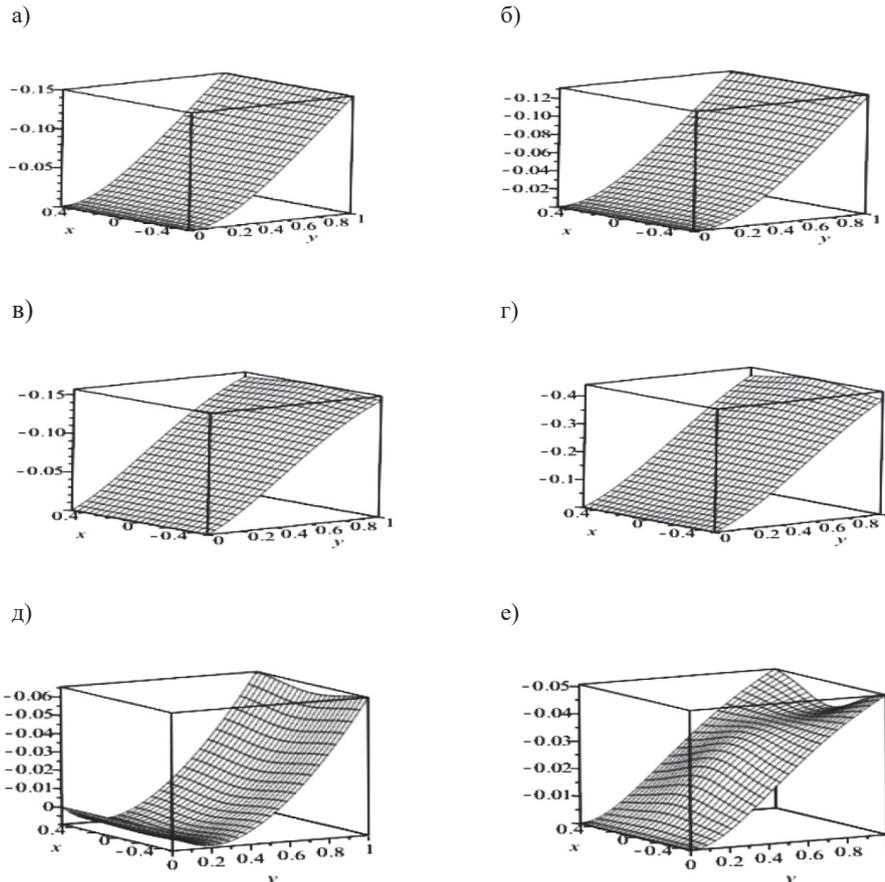


Рис. 2. Форма поверхности квадратной пластины:
 а — при $T = 1$; б — при $T = 40$; в — $m = 43,745$;
 з — при $T = 44,4$; д — при $T = 45,4$; е — при $T = 141,4$

В диапазоне $43,75 < T < 44,4$ вычислительный процесс был расходящимся: неограниченно росли прогибы, невязки и коэффициенты. Этот интервал является зоной неустойчивого состояния пластины. При значении $T = 44,05$ прогибы росли максимально быстро. Это значение можно принять в качестве первой критической нагрузки $T_{кр1} = 44,05$, при которой наиболее вероятно быстрое разрушение пластины, если она является недостаточно упругой. Разрушение может произойти и при любом значении нагрузки из опасного диапазона в случае ее длительного воздействия.

Вторая зона устойчивого состояния $44,4 < T < 45,4$. На рис. 2, з, д показаны формы пластины при $T = 44,4$ и $45,4$. За ней последовала вторая зона неустойчивого состояния $45,4 < T < 49$. Вторая критическая нагрузка $T_{кр2} = 45,9$.

Третья зона устойчивого состояния $49 < T < 98$. В этой зоне формы поверхностей пластины были аналогичны как и в первой зоне устойчивого состояния $0 < T < 43,75$. Следующая зона неустойчивости $98 < T < 102,4$. Найдено третье критическое значение $T_{кр3} = 100,6$.

Четвертая зона устойчивого состояния $102,4 < T < 120$. Неустойчивое состояние наблюдалось при $120 < T < 136,5$. Четвертое критическое значение $T_{кр4} = 125,5$.

Пятая зона устойчивости $136,5 < T < 200$. На рис. 2, e показана устойчивая форма равновесия пластины при $T = 141,4$. Аналогично можно продолжать этот процесс и далее.

Обсуждение (Discussion)

В работе [2] определялась первая (наименьшая) критическая нагрузка для прямоугольной консольной пластины, когда сжимающая нагрузка приложена к свободной стороне, параллельной заделке. Рассматривались три случая: распределенная нагрузка; сосредоточенная сила, приложенная в середине стороны; две одинаковые силы, приложенные в угловых точках. Для первого случая энергетическим методом из условия равенства нулю определителя второго порядка для сжимающего усилия p было получено значение $p_{кр} = 2,4571D/a^2$. В работе [3] рассматривались различные случаи сжимающей нагрузки, приложенной к боковым свободным сторонам. Получено первое критическое значение для квадратной пластины при равномерной нагрузке $p_{кр} = 141,41587D/a^2$. Однако это значение правильнее считать не критическим, а равновесным, так как минимум потенциальной энергии соответствует равновесному состоянию, а не критическому, которое наступает раньше и характеризуется максимумом энергии и неограниченным ростом прогибов. В данном случае соответствующее критическое значение (а по счету у нас оно четвертое) $T_{кр4} = 125,5$. Равновесная нагрузка, полученная в работе [3], находится в последующем интервале устойчивого состояния $136,5 < T < 200$ (рис. 7 соответствует этому устойчивому равновесному состоянию).

Отметим, что значение первой критической нагрузки $T_{кр1} = 44,05$ для квадратной консольной пластины находится в соответствии со значением первой критической нагрузки 37,8 для квадратной пластины [6], заземленной по всем сторонам.

Выводы (Summary)

1. В настоящей работе впервые получено численно-аналитическое решение задачи сложного изгиба тонкой прямоугольной консольной пластины как элемента оперения глубоководных аппаратов. Это решение позволяет весьма точно определить напряженно-деформированное состояние подобных элементов и решить проблему устойчивости в условиях сжимающего давления в плоскости пластины для различных отношений ее сторон.

2. При использовании новых материалов в конструкциях глубоководных аппаратов, обладающих высокой упругостью, найденный спектр критических нагрузок может быть использован в проектных организациях при расчетах на устойчивость. В дальнейшем предполагается исследовать более сложную аналогичную задачу с учетом сжимающей нагрузки на свободном крае, параллельном заделке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ярцев Б. А. Композитные конструкции наружного корпуса и элементов оперения подводной лодки / Б. А. Ярцев, В. М. Шапошников // Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. — 2017. — № 1 (379). — С. 36–44.
2. Xiang-sheng C. The bending stability and vibration of cantilever rectangular plates / C. Xiang-sheng // Applied Mathematics and Mechanics. — 1987. — Vol. 8. — Is. 7. — Pp. 673–683. DOI: 10.1007/BF02458265.
3. Xiang-sheng C. On buckling of cantilever rectangular plates under symmetrical edge loading / C. Xiang-sheng // Applied Mathematics and Mechanics. — 1990. — Vol. 11. — Is. 4. — Pp. 377–383. DOI: 10.1007/BF02015121.
4. Исаулова Т. Н. Устойчивость консольно заземленной косоугольной неоднородной пластины в сверхзвуковом потоке газа / Т. Н. Исаулова, И. М. Лавит // Прикладная механика и техническая физика. — 2011. — Т. 52. — № 4 (308). — С. 191–204.
5. Сухотерин М. В. Устойчивость сжатых панелей обшивки судна / М. В. Сухотерин, Т. П. Кныш, Л. В. Анненков // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2013. — № 2. — С. 51–58.

6. Сухотерин М. В. Определение спектра критических нагрузок и форм равновесия сжатых панелей обшивки корпуса судна / М. В. Сухотерин, Е. В. Потехина, Л. В. Анненков // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2014. — № 2 (24). — С. 44–51.

7. Анненков Л. В. Исследование устойчивости защемленной прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении / Л. В. Анненков // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2015. — № 3 (31). — С. 48–53. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-3-48-53.

8. Sukhoterina M. V. Influence of transverse loading on the stability clamped rectangular plate / M. V. Sukhoterina, S. O. Baryshnikov, T. P. Knysh, N. F. Pizhurina // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2018. — Vol. 239. — Pp. 01022. DOI: 10.1051/mateconf/201823901022.

9. Osadebe N. N. Stability analysis of SSSS thin rectangular plate using multi – degrees of freedom Taylor Maclaurin’s series in Galerkin’s variational method / N. N. Osadebe, V. C. Nwokike, O. A. Oguaghamba // Nigerian Journal of Technology. — 2016. — Vol. 35. — Is. 3. — Pp. 503–509. DOI: 10.4314/njt.v35i3.5.

10. Eslami M. R. Buckling and postbuckling of beams, plates, and shells / M. R. Eslami, J. Eslami, Jacobs. — Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018. — 588 p. DOI: 10.1007/978-3-319-62368-9_4.

11. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. — 635 с.

12. Сухотерин М. В. Расчет прямоугольных пластин Рейсснера / М. В. Сухотерин, С. О. Барышников. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015. — 151 с.

REFERENCES

1. Yartsev, Boris Aleksandrovich, and Valery Mikhailovich Shaposhnikov. “Composite light hull structures and tail unit elements of submarines.” *Transactions of the Krylov State Research Centre* 1(379) (2017): 36–44.

2. Xiang-sheng, Cheng. “The bending stability and vibrations of cantilever rectangular plates.” *Applied Mathematics and Mechanics* 8.7 (1987): 673–683. DOI: 10.1007/BF02458265.

3. Xiang-sheng, Cheng. “On buckling of cantilever rectangular plates under symmetrical edge loading.” *Applied Mathematics and Mechanics* 11.4 (1990): 377–383. DOI: 10.1007/BF02015121.

4. Isaulova, T. N., and I. M. Lavit. “Stability of a cantilevered skew inhomogeneous plate in supersonic gas flow.” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 52.4 (2011): 664–675. DOI: 10.1134/S0021894411040201.

5. Sukhoterina, M. V., T. P. Knysh, and L. V. Annenkov. “Stability of ship’s plating compressed panels.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* 2 (2013): 51–58.

6. Sukhoterina, M. V., E. V. Potekhina, and L. V. Annenkov. “Determination of the spectrum of critical loads and forms balance compressed cladding panels hull.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 2(24) (2014): 44–51.

7. Annenkov, L. V. “Explore of stability of clamped rectangular plate, compressed in one direction.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 3(31) (2015): 48–53. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-3-48-53.

8. Sukhoterina, Mikhail, Sergey Baryshnikov, Tatiana Knysh and Natalia Pizhurina. “Influence of transverse loading on the stability of a clamped rectangular plate.” *MATEC Web of Conferences*. Vol. 239. EDP Sciences, 2018. DOI: 10.1051/mateconf/201823901022.

9. Osadebe, N. N., V. C. Nwokike, and O. A. Oguaghamba. “Stability analysis of SSSS thin rectangular plate using multi – degrees of freedom Taylor Maclaurin’s series in Galerkin’s variational method.” *Nigerian Journal of Technology* 35.3 (2016): 503–508. DOI: 10.4314/njt.v35i3.5.

10. Eslami, M. Reza, Jacobs Eslami, and Jacobs. *Buckling and postbuckling of beams, plates, and shells*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-62368-9_4.

11. Timoshenko, S., and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells*. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1959.

12. Sukhoterina, M. V., and S. O. Baryshnikov. *Raschet pryamougol’nykh plastin Reissnera*. SPb.: Izd-vo Politekhnikeskogo universiteta, 2015.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Барышников Сергей Олегович —

доктор технических наук, профессор, ректор
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: rector@gumrf.ru

Сухотерин Михаил Васильевич —

доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: kaf_math@gumrf.ru

Кныш Татьяна Петровна —

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: kaf_pm@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Baryshnikov, Sergej O. —

Dr. of Technical Sciences, professor, rector
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg 198035,
Russian Federation
e-mail: rector@gumrf.ru

Sukhoterin, Mikhail V. —

Dr. of Technical Sciences, professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg 198035,
Russian Federation
e-mail: kaf_math@gumrf.ru

Knysh, Tat'yana P. —

PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg 198035,
Russian Federation
e-mail: kaf_pm@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 14 января 2020 г.

Received: January 14, 2020.