

DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358

CUBIC SPLINES SYNTHESIS OF A DISTORTED ISOLINE IN THE ASPECT OF USING DIFFERENTIAL MODE OF SATELLITE NAVIGATION

I. V. Yuyukin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The issue of practical application of the concept of «smoothness» in the new paradigm of isogeometric analysis for the interpolation of any navigation isoline based on the method of spline functions is investigated. It is noted that in the process of studying the problem of the exact approximation of the isoline curvature, the practical possibility of bending a planar curve in physical space with the possibility of the existence of discontinuity points is allowed. Taking into account the considered geometric effect it creates a theoretical prerequisite for the synthesis of complex navigation isolines. Variations in the solution of the task are reduced to the optimal selection of the spline modification according to the degree of «smoothness». To understand the possibilities of the mathematical resource, a comparative assessment of a typical set of spline interpolants in the form of linear, quadratic or parabolic, cubic and irrational splines is given. The advantages and disadvantages of each piecewise function are considered. The linear multi-links competing with the perspective cubic spline are interpreted as the minimum splines of the possible maximum «smoothness». The characteristics of the practical arsenal of interpolation tools are illustrated by the explanatory drawings. The cubic spline is recognized as the most preferred form-preserving phenomenon. Theoretically, the leading role of cubic piecewise polynomials in the processing of navigation information is proved. The real advantages of cubic spline interpolation are justified. The mechanism of modernization of the hybrid approximation algorithm with obtaining the effect of the speed of computational operations due to the concretized representation of matrix compositions in the development of the Schoenberg's hypothesis is investigated. In contrast to the classical approach with the permanent calculation of each spline element, the operating with previously known numerical realizations of the matrix structure is proposed. A clarifying geometric interpretation of the probability of occurrence of a distorted navigation isoline is given when using the differential mode of satellite navigation as an alternative to the precise point positioning. The studied theoretical assumptions are confirmed by the practical creation of high-speed application programs for the purpose of «smooth» approximation of a discontinuous isoline or isosurface based on the methods of cubic piecewise approximation. The software upgrade in the proposed study is based on the introduction in the algorithm of additional logical conditions for optimal mathematical manipulation of the points of discontinuity of navigation isolines.

Keywords: curvature approximation, planar curve, spline-interpolant, linear splines, quadratic splines, parabolic splines, cubic splines, irrational splines, Schoenberg's hypothesis, precise point positioning.

For citation:

Yuyukin, Igor V. "Cubic splines synthesis of a distorted isoline in the aspect of using differential mode of satellite navigation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.3 (2021): 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358.

УДК 656.61.052 656

СИНТЕЗ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ИСКАЖЕННОЙ ИЗОЛИНИИ В АСПЕКТЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО РЕЖИМА СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ

И. В. Ююкин

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Исследован вопрос практического применения понятия «гладкости» в новой парадигме изогеометрического анализа для интерполяции любой навигационной изолинии на основе метода сплайн-функций. Отмечается, что в процессе изучения проблемы точного приближения кривизны изолинии допускается практическая возможность изгиба плоской кривой в физическом пространстве с возможностью существования

точек разрыва. Учет рассматриваемого геометрического эффекта создает теоретическую предпосылку синтезирования сложных навигационных изолиний. Вариации решения задачи сводятся к оптимальному подбору сплайновой модификации по степени «гладкости». Для понимания возможностей математического ресурса приводится сравнительная оценка типичного набора сплайн-интерполянтов в виде линейных, квадратических или параболических, кубических и нерациональных сплайнов. Рассматриваются преимущества и недостатки каждой кусочной функции. Конкурирующие с перспективным кубическим сплайном линейные многозвенники интерпретируются как минимальные сплайны возможной максимальной «гладкости». Характеристика практического арсенала интерполяционных средств иллюстрируется поясняющими рисунками. Кубический сплайн признается наиболее предпочтительным формосохраняющим феноменом. Теоретически доказывается лидирующая роль кубических кусочных многочленов в вопросах обработки навигационной информации. Обосновываются реальные преимущества кубической сплайн-интерполяции. Исследуется механизм модернизации гибридного алгоритма аппроксимации с получением эффекта быстродействия вычислительных операций за счет конкретизированного представления матричных композиций в развитии гипотезы Шенберга. Предлагается оперирование с заранее известными числовыми реализациями структуры матриц в отличие от классического подхода с перманентным вычислением каждого сплайнового элемента. Дана уточняющая геометрическая интерпретация вероятности возникновения искаженной навигационной изолинии при использовании дифференциального режима спутниковой навигации как альтернативы точного позиционирования положения. Рассматривается алгоритмическая возможность аппроксимации сложной изолинии на основе специальных разработанных предложений. Ситуация моделирования разрывной изолинии является авторской точкой зрения на перспективу восстановления искаженной навигационной изолинии кубическими сплайнами. Исследованные теоретические предположения подтверждаются практическим созданием прикладных программ высокого быстродействия с целью «гладкого» приближения разрывной изолинии или изоповерхности на основе методов кубической кусочной аппроксимации. Модернизация программного обеспечения в предлагаемом исследовании основывается на введении в алгоритм дополнительных логических условий оптимального математического манипулирования точками разрыва навигационных изолиний.

Ключевые слова: приближение кривизны, плоская кривая, сплайн-интерполюнт, линейные сплайны, квадратические сплайны, параболические сплайны, кубические сплайны, нерациональные сплайны, гипотеза Шенберга, точное позиционирование положения.

Для цитирования:

Ююкин И. В. Синтез кубическими сплайнами искаженной изолинии в аспекте использования дифференциального режима спутниковой навигации / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 3. — С. 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358.

Введение (Introduction)

Выдвигается гипотеза о принципиальной возможности синтезирования абсолютно любой навигационной изолинии на основе *метода сплайн-функций*. Вариации решения данной задачи сводятся к оптимальному подбору сплайновой модификации по степени «гладкости». С геометрической точки зрения кубический сплайн является наиболее предпочтительным формосохраняющим интерполянтом, поскольку он формирует пространственную «гладкую» кривую [1]. При рассмотрении вопроса манипулирования формой восстанавливаемого кубическим сплайном математического объекта в новой парадигме изометрического анализа допускается практическая возможность изгиба «гладкой» кривой в физическом пространстве [2]. Данный геометрический эффект ориентирует исследователя на теоретическую возможность синтезирования самых сложных изолиний. Для получения оптимальной интерполяции с математической точки зрения выгодно использовать кусочные полиномы третьей степени. Кубический сплайн имеет максимальный класс «гладкости», обеспечивающий наличие непрерывности производных второго порядка в серии точек «склейки» кусочной конструкции. Дифференцируемость до вторых производных в точках многозвенного соединения однозначно не создает «гладкости» кубического сплайна в смысле приближения минимума кривизны искусственно синтезируемой плоской кривой. Для того чтобы получить минимум кривизны или максимум «гладкости», у любой изолинии дополнительно необходимо обеспечить правильную ориентацию набора контрольных вершин характеристического многоугольника сплайнового базиса.

Масштабирующий многовершинный контур многозвенной функции геометрически формируется при соединении прямыми линиями позиций полюсов интерполяции [3]. Интерполяционная кривая конструируется на базисе контрольных вершин характеристического многоугольника, единственным образом задающего ее геометрическую форму [4]. Плоской кривой однозначно принадлежат первая и последняя базисная вершина через реализацию так называемых *граничных условий*, в то время как промежуточные вершины характеризуют производные, порядок и алгебраический вид самой навигационной изолинии. Для получения приемлемой схемы сплайнового приближения навигационной функции необходимо учитывать взаимосвязь между полюсами интерполяции и сеточной организацией узлов. Версия аппроксимации методом наименьших квадратов является наиболее обоснованным способом выбора полюсов интерполяции [5].

Локальное изменение вершин в одиночном сеточном сегменте деформирует форму алгебраической кривой только внутри выбранного интервала, в то время как остальная часть синтезируемой кривой останется прежнего геометрического вида. Отличительная черта *локальности* заключается в том, что значения сплайна на промежутке между двумя узлами сетки зависят исключительно от интерполированной навигационной функции только в некоторой окрестности фиксированного диапазона при полном отсутствии геометрического влияния на внешний вид интерполяционной кривой на остальных сеточных сегментах [6]. Практически *свойство локальности* существенно затрудняет исследователю реальную возможность осуществлять независимые изменения формы результирующей кривой за пределами определенного координатного отрезка при ограниченной возможности конструкторской манипуляции общим видом сплайновой конструкции. Данный эффект технологически обуславливается локальностью базиса кубического сплайна [7].

Фактически кубический сплайн задает своими конструктивными особенностями идеальный вариант приближения, так как применение сплайна меньшей степени автоматически приведет к возможности расходимости самого процесса интерполяции ввиду понижения «гладкости» алгебраической кривой [8]. В настоящее время кубические сплайны являются важнейшим инструментом в задачах, связанных с аппроксимацией функций [9]. Хорошие дифференциальные свойства и алгоритмичность делают аппарат кубических сплайнов универсальным инновационным средством обработки разнообразной навигационной информации.

В целом имеет место характерная ситуация, когда, на основе частного абстрактного случая использования кубического сплайна, научное исследование порождает многократность конкретных прикладных применений в процессе решения разноплановых навигационных задач. Представляется целесообразным в аспекте обработки навигационной информации отдать предпочтение совершенному сплайновому алгоритму с апробированным быстродействием и высокой точностью вычислений в отличие от существующих методов интерполяции [10]. Использование устойчивых математических процедур, безусловно, может повысить стандарты безопасности судовождения при синхронном игнорировании вероятности аварийности ввиду недостатков традиционных расчетных методов.

Более выгодным является применение перспективных алгоритмов на опережение возможности появления аварийной ситуации без допущения роста аварийности, обусловленного использованием морально устаревших классических методов. В теоретическом плане проблема повышения точности судовождения решается также путем совершенствования алгоритмов обработки информации с учетом того, что недостатками современных математических методов являются лежащие в их основе допущения и предположения, не позволяющие гарантированно решать задачи аппроксимации с приемлемой точностью [11].

Основная проблема использования традиционных алгоритмов заключается в том, что они не могут рассматриваться как алгоритмы универсальной аппроксимации при исключении возможности потенциального моделирования реально существующих зависимостей с любой наперед заданной степенью точности [11]. С целью реализации прикладных возможностей сплайн-функций в рамках проекта геометрического моделирования сложной изолинии сформулированы следующие задачи:

1. Необходимость теоретического подтверждения гипотезы о возможности разработки математической концепции использования искаженной изолинии в процессе обработки навигационной информации.
2. Обоснование оптимальности и эффективности применения кубических сплайнов для восстановления изолиний с элементами функционального разрыва при сравнительной оценке с альтернативными интерполянтами.
3. Анализ свойства локальности и экстремального свойства сплайнов для разработки рекомендаций по их практическому использованию в сплайновых алгоритмах.
4. Формирование точки зрения о непосредственном использовании сетки искаженных дифференциальными поправками изолиний при уточняющей геометрической интерпретации для понимания перспективы многофакторной обработки навигационной информации.
5. Выполнение обзора оценки точности современных возможностей дифференциального режима спутниковой навигации.
6. Рассмотрение вопроса субъективного математического манипулирования измерительными данными при аппроксимационном моделировании изолиний и изоповерхностей.
7. Разработка высокоскоростного программного обеспечения для «гладкого» приближения любой изолинии и изоповерхности на основе методов кубической кусочной аппроксимации.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Для понимания возможностей применения математического ресурса сплайн-функций представляется логичным выполнить сравнительную оценку типичных интерполянтов. Сплайн первой степени геометрически представляет собой ломаную линию, проходящую через полюса интерполяции за счет конструирования геометрии объекта на основе комплексирования линейного сплайнового базиса (рис. 1) [6]. За внешней простотой рисунка скрывается специфичный вариант из арсенала сплайновых средств, позволяющих успешно решить прикладную задачу судовождения с неулучшаемыми показателями точности. В ситуации аппроксимации линейными сплайновыми комбинациями порядок приближения даже на равномерной сетке будет лишь вторым, а на неравномерной сетке — минимальным (первым) [9]. Если по условию практической навигационной задачи такой точности достаточно, то в данном случае появляется целесообразность применения линейного функционала [12].

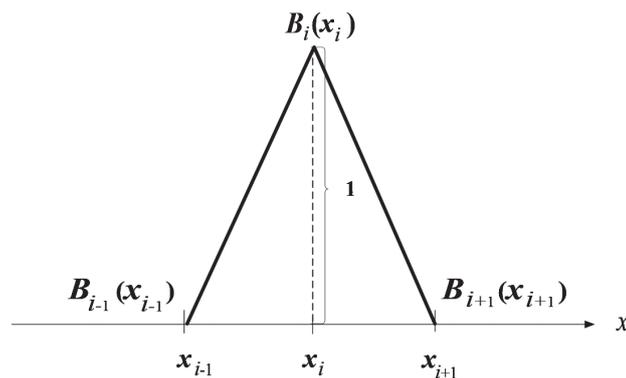


Рис. 1. Базис фрагментарного линейного B-сплайна

При этом простом «сценарии» решения практических задач необходимо учитывать, что аппроксимация ломаными линиями не может быть в полном смысле «гладкой» и поэтому эффективной. Кусочно-линейную функцию нерационально применять в программной реализации алгоритма обработки навигационной информации ввиду провоцирования «лестничного эффекта» при компьютерной визуализации практических приложений задач судовождения [12]. Единственное преимущество сплайна первой степени заключается в том, что он формализуется по явным формулам, не требуя задания *краевых условий* [12]. Линейный сплайн с позиций теории приближения можно интерпретировать как минимальный сплайн возможной максимальной «гладкости» [13].

Понять идею линейной интерполяции лучшим образом позволит внимательное наблюдение за работой художника. Обычно эскиз схематически выполняется для того, чтобы выразить общую идею рисунка. Такой подход демонстрирует суть геометрической интерпретации *метода линейной сплайновой интерполяции*. Однако графические неточности в виде «звездных» элементов убедительно подчеркивают стратегические недостатки применимости линейного сплайна в сравнительной оценке с преимуществом кубических многозвенных конструкций [12].

Возможной альтернативой линейной интерполяции может явиться приближение аналитических функций параболическими сплайнами. В общем случае существует определенный круг специальных математических задач так называемой *выпуклой интерполяции*, или *сплайн-интерполяции с ограничениями типа неравенств* по применимости сплайнов второй степени. Параболические сплайны являются многозвенниками меньшей степени «гладкости» по сравнению с кубическими *сглаживающими сплайнами*, что объясняется их некоторой математической «искусственностью». Под данным термином понимается отсутствие *экстремальных свойств* кусочно-квадратических функций, т. е. их дифференцируемость может быть реализуема только до первой производной, тогда как кубические сплайны обладают непрерывностью до производных второго порядка. При этом степень свободы каждой части кусочного двучлена остается неопределенной, что автоматически предполагает многообразие ситуаций интерполяции в неявной форме. Математические условия монотонности для параболического сплайна являются менее строгими, чем для кубического.

Использование параболических сплайнов оправдано при интерполяции аналитических функций малой «гладкости» [14]. Главными отрицательными условиями применения квадратичных сплайнов являются факты отсутствия наследования геометрической формы интерполируемой функции и вероятность нежелательных всплесковых осцилляций восстановленной кривой в определенных обстоятельствах [15].

Кубический сплайн — это кусочно-полиномиальная дважды непрерывно дифференцируемая функция однократного дефекта, составленная из фрагментов кубических многочленов. Данное определение позволяет интерпретировать указанный математический феномен как *экстремальный сплайн* наивысшей «гладкости». Свойство экстремальности позволяет практически решить важную задачу приближения сплайнами со «сглаживанием» исходных данных в ситуации, когда в измерениях присутствует погрешность. *Сглаживающий сплайн* характеризуется тем, что проходит в некоторой окрестности заданных исходных значений, в отличие от интерполяционного сплайна, строго проходящего через все позиции измеренных данных. По сравнению с интерполяционным сплайном эволюция до сглаживающего сплайна требует большего объема вычислительных операций. При решении вопроса о том, какой сплайн синтезировать, необходимо в первую очередь учитывать погрешности информационных данных. Практически бесполезным является применение сглаживающего сплайна, когда экспериментальная информация задана с точностью, сопоставимой с погрешностью представления чисел в двоичной системе счисления компьютерных вычислительных операций. В то же время неизбежно приходится строить сглаживающий сплайн, когда, согласно условию задачи, на качественные характеристики кусочного многозвенника накладываются жесткие ограничения.

Все недостатки, присущие линейным и параболическим сплайнам, в значительной степени нивелируются при переходе к кубическим сплайнам. Лидирующая роль сплайнов третьей степени однозначно проявляется при компьютерной визуализации программных алгоритмов удобочитаемостью графических визуализаций и практическим отсутствием графических искажений, подобных «звездным эффектам» [12]. В случае кубического сплайна геометрические разрывы в узлах интерполяции отсутствуют, а полиномы, примыкающие к каждому сеточному узлу, «склеиваются» в один алгебраический многочлен. Полиномиальный кубический сплайн может получить эффективное представление для вычислений по *схеме Горнера* с целью методического обеспечения максимального быстродействия расчетной процедуры [16]. Таким образом, наиболее востребованными и используемыми в практических приложениях могут оказаться кубические сплайны как основной и универсальный инструмент приближения навигационных функций благодаря хорошим аппроксимативным свойствам в сочетании с присущей им относительной простотой компьютерных реализаций [17].

Более универсальным и удобным оказалось применение на практике именно кусочно кубических многочленов как сплайнов, обладающих *свойством наилучшей «гладкости»* с целью эффективного моделирования плоских кривых и плавных приближений поверхностей [18]. Хорошие аппроксимативные свойства в сочетании с эффективностью компьютерных реализаций возводят кубические сплайны в ранг оптимального средства решения различных задач судовождения.

Сплайны четвертой степени и выше интерпретируются как нерациональные. Инкорпорирование в обработку навигационной информации сплайновых конструкций высоких степеней неизбежно вызывает существенное усложнение расчетных процедур с синхронной потерей быстродействия вычислительных операций. Системы уравнений для сплайнов более высоких степеней неоправданно усложняются, диагональное преобладание в соответствующих системах уравнений отсутствует, что не позволяет гарантировать устойчивое вычисление определяемых параметров и затрудняет получение оценок погрешности и изучение сходимости процесса интерполяции [19]. Отсутствие фактора устойчивости алгоритма является признаком возможности прогрессивного роста вычислительных погрешностей.

Поскольку кубический случай является лучшим вариантом аппроксиматора, представляется целесообразным конкретизировать гибридный алгоритм двумерного приближения навигационной функции при определенной ситуации использования многосвязников третьей степени. Для этого необходимо однозначное представление составляющих элементов алгоритмического конгломерата в виде комбинаторики *B*-сплайнов и сплайнов лагранжева типа [12]. Для моделирования базиса в пространстве кусочно-многочленных функций [20] предлагается к реализации следующая алгоритмическая комбинация стратегической структуры решения задачи интерполяции в соответствии с *гипотезой Шенберга* [21]:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i B_i(x), \quad (1)$$

где $S(x)$ — базисный финитный сплайн с генерацией по координате x ;

c_i — скалярные сплайновые коэффициенты, подлежащие математическому определению или (в геометрической интерпретации) контрольные вершины характеристического многоугольника сплайнового базиса;

$B_i(x)$ — «шапочные» функции базисного сплайна.

Отличие фрагментарного *B*-сплайна $S(x)$ от однократного формата лагранжева аналога заключается в финитности конструкции базисного интерполянта (рис. 1 и 2). Рассмотрим подробно на рис. 2 представление кубического *B*-сплайна (1), акцентируя внимание на числовых значениях «шапочных» функций, реализующихся в каждом интерполяционном узле в конкретные цифры.

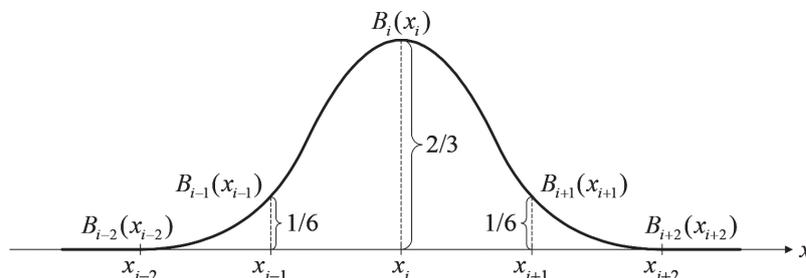


Рис. 2. Цифровая реализация «шапочных» функций фрагментарного кубического *B*-сплайна

Узловые «функции-крыши» $B_i(x_i)$ базисного кубического сплайна на пятиузловом сеточном интервале принимают следующие числовые значения в соответствии с рис. 2:

$$B_i(x_i) = \frac{2}{3}; B_{i-1}(x_{i-1}) = B_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{1}{6}; B_{i-2}(x_{i-2}) = B_{i+2}(x_{i+2}) = 0. \quad (2)$$

Математическая конструкция кубического сплайна лагранжева типа в одномерной композиции представлена на рис. 3.

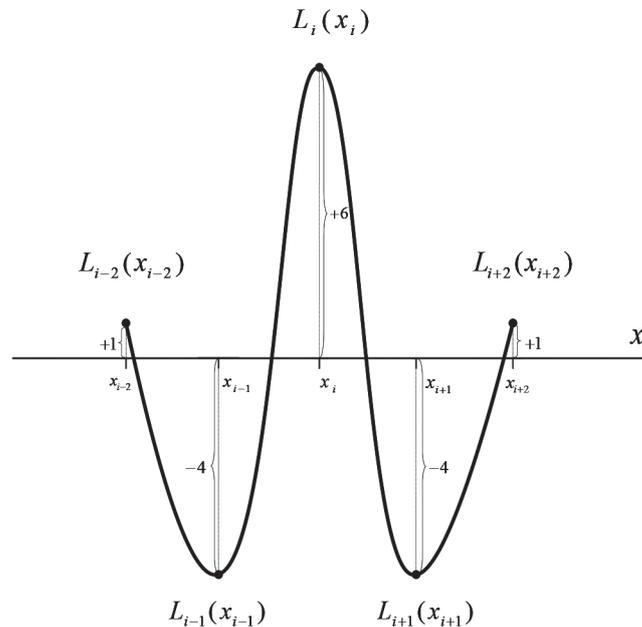


Рис. 3. Цифровые реализации фрагментарного кубического сплайна лагранжева типа

Принцип построения кубических многочленов Лагранжа на пятиузловом сеточном сегменте технологически является идентичным своему аналогу в виде кубического нормализованного *B*-сплайна (см. рис. 2). Для равномерной сетки коэффициенты сплайновых аналогий Лагранжа реализуются в виде конкретных чисел в соответствии с рис. 3:

$$L_{i,i-2} = +1; L_{i,i-1} = -4; L_{i,i} = +6; L_{i,i+1} = -4; L_{i,i+2} = +1. \quad (3)$$

Отличие интерполянта Лагранжа от базисного сплайна заключается в утрате ключевого свойства нормализованности при отсутствии разбиения единицы на определенных сеточных носителях конечной минимальной длины. Базисный и лагранжев сплайн в сравнении с восстанавливаемой изолинией представляют разные физические объекты. Например, *B*-сплайн организует базовую искусственную конструкцию, а не является самым непосредственным фрагментом кривой [22].

Реальная математическая кривая на примере базисного сплайна генерируется путем умножения последовательности финитных функций $B_i(x_i)$ на координаты вершин характеристического многоугольника сплайнового базиса c_i в каждой произвольной сеточной точке x [23]. Таким образом, многозвенник является вторичной конструкцией по отношению к оригинальной функциональной зависимости $U = f(x, y)$ — рис. 4.

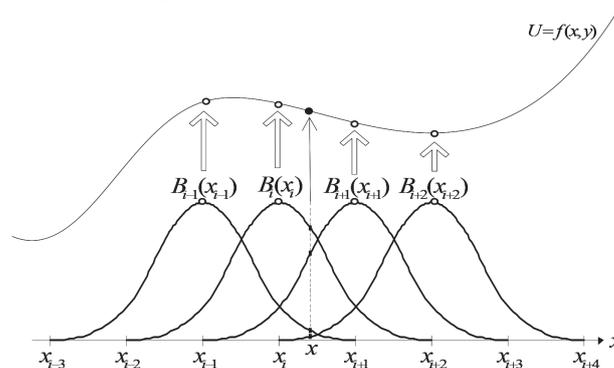


Рис. 4. Геометрическая интерпретация моделирования абстрактной навигационной изолинии кубическими базисными сплайнами

Система уравнений гибридного комбинации B -сплайна с его лагранжевым аналогом в блочно-матричной форме в общем виде может быть представлена следующим образом [5]:

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ \frac{1}{\sqrt{p}} E_1 & H_2 \\ E_2 & \frac{1}{\sqrt{p}} H_1 \\ \frac{1}{\sqrt{p}} H_1 & \frac{1}{\sqrt{p}} H_2 \end{bmatrix} \times [C] = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Клетки блочных матриц E_1 , E_2 и H_1 , H_2 , соответственно, в общем виде формируются коэффициентами $B_{g, k+1}(\varphi_q)$, $B_{h, m+1}(\lambda_r)$ и $L_{g, k+1}(\varphi_q)$, $L_{h, m+1}(\lambda_r)$ [5]:

$$E_1 = \begin{bmatrix} B_{-k, k+1}(\varphi_1) & \dots & B_{g, k+1}(\varphi_1) \\ B_{-k, k+1}(\varphi_2) & \dots & B_{g, k+1}(\varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{-k, k+1}(\varphi_q) & \dots & B_{g, k+1}(\varphi_q) \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} B_{-m, m+1}(\lambda_1) & \dots & B_{h, m+1}(\lambda_1) \\ B_{-m, m+1}(\lambda_2) & \dots & B_{h, m+1}(\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{-m, m+1}(\lambda_r) & \dots & B_{h, m+1}(\lambda_r) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} L_{-k, k+1}(\varphi_1) & \dots & L_{g, k+1}(\varphi_1) \\ L_{-k, k+1}(\varphi_2) & \dots & L_{g, k+1}(\varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{-k, k+1}(\varphi_q) & \dots & L_{g, k+1}(\varphi_q) \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} L_{-m, m+1}(\lambda_1) & \dots & L_{h, m+1}(\lambda_1) \\ L_{-m, m+1}(\lambda_2) & \dots & L_{h, m+1}(\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{-m, m+1}(\lambda_r) & \dots & L_{h, m+1}(\lambda_r) \end{bmatrix}.$$

Поиск вероятнейшего решения (4) может быть эффективно реализован на основе модернизированного *метода наименьших квадратов* [5]. Оптимальная применимость кубических B -сплайнов в практических приложениях обуславливается небольшими погрешностями вычислений на основе применения данных аппроксимантов [24]. Популярность кубического сплайна экспериментально подтверждается доказанной высокой точностью вычислительных операций до шестого порядка в расчете любого навигационного параметра при интерполяции любой навигационной изолинии [12]. При использовании кубических сплайнов был эффективно решен многовариантный спектр прикладных навигационных задач: аппроксимация геоида [25], сплайновое восстановление рельефа подводной топографии на основе батиметрических измерений [12], сплайн-интерполяция гиперболической навигационной изолинии [16], поиск ошибок в навигационных базах данных методом компьютерной визуализации синтезированных сплайновых изоповерхностей [26].

Результаты (Results)

С целью детализированного представления B -сплайновых алгоритмов предлагается выполнить конкретизацию матричных композиций типа (5), скомпонованных из набора числовых сочетаний кубического сплайна как наиболее оптимального для реализации матричного исчисления [6]. Конкретизированное оформление математических конструкций может способствовать минимизации неформализуемой интуиции, обычно присутствующей у исследователя в любом

тщательно разработанном алгоритме, для субъективного математического манипулирования полем измерительных данных при аппроксимационном восстановлении поверхностей или аналитических кривых [27]. Чертежник на основе собственного опыта на подсознательном уровне воспринимает информацию о геометрической форме, содержащуюся в измерительных данных, и интуитивно проводит плоские кривые корректно и плавно [28]. Сплайновый подход является эффективным инструментарием для моделирования геометрических объектов в автоматизированном проектировании для исключения влияния человеческого фактора [29].

Избавиться от дробного представления коэффициентов базисного кубического сплайна позволит умножение на цифру шесть каждой «шапочной» функции $B_i(x_i)$ с целью оперирования целочисленными значениями:

$$B_i(x_i) = 4; \quad B_{i-1}(x_{i-1}) = B_{i+1}(x_{i+1}) = 1. \quad (6)$$

Общий матричный коэффициент $1/6$ перед матрицами E_1 и E_2 на рис. 4 возвращает представление B -сплайна к оригинальной числовой конструкции (2), нивелируя ситуацию искусственного домножения на цифру шесть узловых значений «шапочных» функций. Сдвигом строк клеточных матриц E_1 и E_2 на рис. 5 реализуются ленточные версии данных в конкретном представлении прямоугольной таблицы чисел «функций-крыш» B -сплайна на примере кубического аппроксиманта в случае задания естественных краевых условий [30]. По существу, через краевые условия в конструкцию сплайна включаются свободные параметры, варьированием которых, в известной степени, можно управлять формой сплайна:

$$E_1 = \frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 4 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}; \quad E_2 = \frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 4 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

Рис. 5. Конкретизированная трехдиагональная матрица интерполяционного кубического B -сплайна

Трансформированные числовые реализации формул (5) выделены отличительными красными прямоугольниками в презентации матрицы E_1 . Трехдиагональное сочетание демонстрируется красными линиями на примере матрицы E_2 . В процессе анализа рис. 5 выявляется доминирование главной диагонали. Аналогичным сдвигом строк клеточных матриц H_1 и H_2 на рис. 6 реализуются ленточные версии блочных матриц в конкретном представлении прямоугольной таблицы чисел сплайна лагранжева типа на примере кубического случая при задании естественных краевых условий [30].

Числовые последовательности формулы (2) выделены отличительными красными прямоугольниками в презентации матрицы H_1 в полном соответствии с числовыми реализациями, представленными на рис. 3. Пятидиагональная математическая привилегированность продемонстрирована в виде красных линий на примере матрицы H_2 . Явное диагональное преобладание в матрицах E_1, E_2 и H_1, H_2 очевидно, а следовательно, решение матричной композиции существует и является единственно возможным [1].

$$H_1 = \begin{bmatrix} \dots & +1 & \pm 0 & \dots \\ \dots & -4 & +1 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & \dots \\ \dots & +6 & -4 & +1 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & \dots \\ \dots & -4 & +6 & -4 & +1 & \pm 0 & \pm 0 & \dots \\ \dots & \boxed{+1} & \boxed{-4} & \boxed{+6} & \boxed{-4} & \boxed{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \pm 0 & \boxed{+1} & \boxed{-4} & \boxed{+6} & \boxed{-4} & \boxed{+1} & \dots \\ \dots & \pm 0 & \pm 0 & +1 & -4 & +6 & -4 & \dots \\ \dots & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & +1 & -4 & +6 & \dots \\ \dots & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & +1 & -4 & \dots \\ \dots & \pm 0 & +1 & \dots \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} \dots & +1 & \pm 0 & \dots \\ \dots & -4 & +1 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & \dots \\ \dots & +6 & -4 & +1 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & \dots \\ \dots & -4 & +6 & -4 & +1 & \pm 0 & \pm 0 & \dots \\ \dots & +1 & -4 & +6 & -4 & +1 & \pm 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \pm 0 & +1 & -4 & +6 & -4 & +1 & \dots \\ \dots & \pm 0 & \pm 0 & +1 & -4 & +6 & -4 & \dots \\ \dots & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & +1 & -4 & +6 & \dots \\ \dots & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & +1 & -4 & \dots \\ \dots & \pm 0 & +1 & \dots \end{bmatrix}$$

Рис. 6. Конкретизированная пятидиагональная матрица интерполяционного кубического сплайна лагранжева типа

Задачи интерполирования и аппроксимации сплайнами фактически связаны с решением систем алгебраических уравнений с ленточными матрицами. Например, для построения интерполяционного кубического B -сплайна необходимо решить систему с трехдиагональной матрицей (рис. 5), а для организации конструкции кубического сплайна лагранжева типа появляется необходимость решения системы с пятидиагональной матрицей (рис. 6). Матричное диагональное преобладание обеспечивает существование и единственность кубического сплайна [1]. С математической точки зрения диагональное преобладание означает невырожденность рассматриваемой матрицы, что гарантирует существование решения системы алгебраических уравнений в матричном исчислении [28]. Диагональное преобладание матриц обеспечивает алгоритму корректность и устойчивость в том смысле, что все алгебраические действия, связанные с матричным исчислением, выполнимы, т. е. знаменатели в формулах нигде не обращаются в ноль.

Конкретизированное представление матриц в алгоритме при его программной реализации позволяет дополнительно увеличить быстродействие расчетов, так как оперирование с заранее известными числами является более эффективным в отличие от необходимости перманентного вычисления каждого элемента матрицы по теоретической формуле (1), предложенной Шенбергом с целью унифицированного применения для сплайнов различных степеней. Поскольку коэффициенты заранее известны в случае определенности использования кубического сплайна (2), (6) или его аналога лагранжева типа (3), целесообразно непосредственно в расчете задействовать предварительно сформированные на основе выбора кубического интерполянта числа, условно абстрагируясь от общего применения теоретической формулы (1), требующей, по своей стратегической сути, каждый раз вычисления заново сплайновых коэффициентов в тактических вариантах выбора сплайнов первой, второй, третьей или четвертой степени.

Абстрактный характер конкретизированного представления матриц в теоретическом исследовании получает конкретное оптимальное воплощение при программной реализации гибридного сплайнового алгоритма. Выявленная целесообразность применения кубического сплайна позволяет предельно конкретизировать алгоритм для разработки высокоскоростного программного обеспечения. В данном исследовании рассматривается алгоритмическая возможность аппроксимации любой навигационной функции вплоть до искаженной изолинии, возникающей от принятия уточняющих поправок дифференциального режима.

Предположим, что абстрактная навигационная изолиния, изначально представленная на рис. 4, задействована в процессе обработки навигационной информации в дифференциальном режиме, характеризующегося оперативным учетом специальных поправок в реальном времени для повышения точности определения в позиционировании морского подвижного объекта. С геометрической точки зрения учет поправок неизбежно вызовет трансформацию любой навигационной изолинии, как гипотетически интерпретировано на рис. 7.

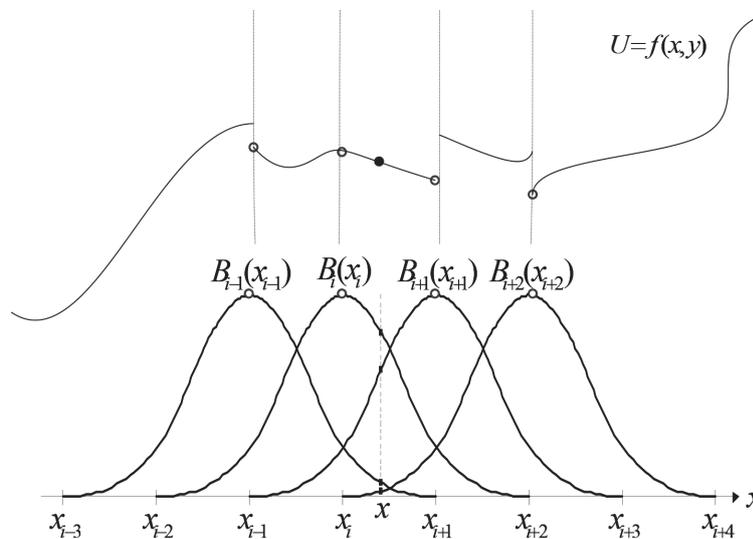


Рис. 7. Гипотетическая геометрическая интерпретация аппроксимации кубическими базисными сплайнами абстрактной искаженной навигационной изолинии

Ввиду сложности оперирования искаженными изолиниями такие атрибуты математических основ судовождения всегда исключались из процесса обработки информации, и задача реализации дифференциального режима решалась сугубо технически, без какой-либо геометрической оценки. Впервые предлагается пересмотреть стереотипное абстрагирование от геометрической интерпретации искаженной изолинии, поскольку методы сплайн-функций позволяют оперировать также с такими сложными алгебраическими объектами, как разрывные изолинии, подобные геометрическому объекту, интерпретированному на рис. 7. Сформируем абстрактную искаженную изолинию, трансформированную из обычной гладкой алгебраической кривой за счет ввода поправок дифференциального режима. Сложность представленной гипотетической изолинии обуславливается наличием вероятного существования трех возможных внутренних точек разрыва в координатах x_{i-1} , x_{i+1} , x_{i+2} . В качестве разрывов допускаются предельные случаи математического искажения изолинии. Во внутренних точках разрыва навигационная функция $U = f(x, y)$ условно не определена.

Фактически с позиций теории приближения функций кусочная функция $S(x)$ имеет два значения в каждой позиции разрывности, а именно: функциональное значение слева определяется левым сплайновым многочленом, значение функции справа — правым многочленом. Для определенности предлагается выбирать в каждой точке разрыва значение справа, т. е. условно считать, что $S(x)$ является непрерывной экстраполированной функцией справа, что дает определенную

однозначность программной реализации сплайнового алгоритма. Для преобразования точки разрыва левый и правый многочлен виртуально «склеиваются» в один правый с организацией унимодальной функции, уменьшающей вариацию. Таким образом, точка разрыва обладает свойством строгого альтернирования в смысле совпадения по значению с правым многочленом при абстрагировании от фактического существования функциональной неопределенности ввиду формального условия «отсутствия узла».

Предположение о принципиальной возможности моделирования разрывной изолинии является особой авторской точкой зрения на перспективу аппроксимации искаженной навигационной изолинии кубическими сплайнами. С математической точки зрения при этом можно по-прежнему условно считать, что функция $U = f(x, y)$ имеет два значения в каждой точке разрыва. Однако при кусочно-многочленной аппроксимации для кубического случая теоретически допускается ситуация разрыва одной производной при так называемом *существовании однократного дефекта сплайна*, что позволяет в данном случае игнорировать факт двойственности функциональных значений.

Как показано на рис. 7, для получения наибольших порядков приближения навигационной функции точки разрыва должны быть включены в число узлов координатной сетки независимым образом в качестве дополнительного условия. Если при восстановлении искаженной изолинии не позаботиться о целесообразности принятия таких специальных математических мер, то для кубического сплайна будет характерным появление флуктуирующих осцилляций. При оптимальном выборе узлов наличие разрыва практически не влияет на стратегическое поведение сплайна в геометрическом понимании процесса аппроксимации.

Предлагаемый подход позволяет считать искаженную изолинию практически идентичной кубическо-многочленной функции с принципиально возможным применением к синтезированию разрывной изолинии в полной мере аппарата сплайн-функций. Благодаря данной точке зрения отпадает стратегическая необходимость применения сложных рутинных математических процедур при анализе определенности кубического аппроксиматора в точке объективно оцениваемого формального разрыва. В соответствии с этим программная реализация разработанных алгоритмов практически не меняется по содержанию, за исключением добавления в цикл паскаль-программы эпизодического логического условия приравнивания в точке разрыва искаженной изолинии по функциональности значения справа. Таким образом, кубическая кусочно-многочленная функция в прикладной программе рассматривается как непрерывная функция справа, что фактически однозначно создает возможность использования в обработке навигационной информации искаженной изолинии как таковой.

Данный подход позволяет при дифференциальном режиме сформировать теоретическое тенденцию оперирования искаженными изолиниями в развитие классического метода изолиний для обработки навигационной информации, а не абстрагироваться от него технической детализацией учета корректировочных поправок.

Обсуждение (Discussion)

При дифференциальном методе выполняется постоянное сравнение эталонных геодезических координат береговой аппаратуры с данными спутниковой навигационной системы. Поправки, полученные в результате сравнения, передаются подвижным потребителям, что позволяет повысить точность определения места судна каждого объекта. Дифференциальный режим имеет особенную эффективность при вынужденном использовании геометрически неоптимальных спутников. С целью высокоточного позиционирования сигналы спутников дополняются корректирующими поправками, передаваемыми передатчиком опорной береговой станции для компенсации погрешности финальной обсервации. В основе дифференциальной навигации используется физический эффект относительного постоянства погрешностей во времени и пространстве.

Дифференциальный режим по своей концептуальности, безусловно, является безупречным способом определения места судна, повышающим точностные характеристики обсервации

на порядок [31]. При использовании дифференциальных методов электронного местоопределения морских транспортных средств точность повышается до 3–10 м в пределах рабочей зоны контрольно-корректирующей станции спутниковой радионавигационной системы [31]. С помощью дифференциальных дополнений глобальной навигационной спутниковой системы на внутренних водных путях Российской Федерации можно осуществлять практически непрерывные высокоточные определения места речного судна с точностью 1–5 м с вероятностью 95 % [32].

В настоящее время ведутся интенсивные исследования по повышению точностных характеристик дифференциального режима GPS на основе различных математических методик. Предложен метод повышения точности определения местоположения с использованием измерений расстояний между спутниками при однозначно неопределенной перспективе практического применения данного подхода, но с зафиксированным фактом, свидетельствующем о том, что дифференциальный GPS (DGPS) показывает лучшую производительность, чем автономный [33]. При локальном дифференциальном местоопределении на основе измерений псевдодальности без использования псевдофазовых измерений в рамках так называемого *альтернативного точного метода позиционирования* — *Precise Point Positioning (PPP)* достигается точность около 0,5 м в режиме реального времени [34].

Уточнение позиции в локальной дифференциальной системе достигается за счет использования морским подвижным потребителем результатов точных измерений псевдодальностей, передаваемых опорной станцией, располагающейся в центре некоторой локальной зоны, размер которой характеризуется протяженностью в пределах 200 км [35]. В центре такой зоны точность абсолютного местоопределения составляет 0,5 м и менее, а к ее границам точность постепенно понижается до точности стандартного спутникового определения места судна. При высокоточном местоопределении (PPP) становится возможным представление координат навигационной аппаратуры потребителя с ошибкой, не превышающей 1–3 см в режиме послесеансной обработки с опозданием в 3–5 мин из-за совместной обработки измерений псевдодальностей, псевдофаз и учета высокоточных корректирующих поправок [35]. Для достижения сантиметровой точности глобальной навигационной спутниковой системы с кодовым разделением каналов применяются алгебраические методы решения определения высокоточных абсолютных координат потребителя на основе разрешения неоднозначности целочисленностей псевдофаз [36]. В пересечении псевдостадиометрических спутниковых изоповерхностей с земной поверхностью образуются исследуемые сложные навигационные изолинии при дальномерном методе определения места судна относительно нескольких одновременно наблюдаемых спутников.

Сложность геометрического вида изолиний определяется в зависимости от фактического выбора математической модели планеты. Прерогатива использования поверхности геоида является наиболее предпочтительной ввиду устранения упрощенного применения приближительной реконструкции гравитационного облика Земли [25]. В ситуации выбора геоида получается наиболее сложная геометрическая форма навигационной изолинии с допускаемыми точками функционального разрыва. В случае применения в современном судовождении сплайновой модели геоида нивелируется различие систем позиционирования, определяемое разными параметрами эллипсоидов, взятых за геодезическую основу при производстве бумажной или электронной морской карты. При этом автоматически возникает унификация деятельности вахтенного помощника ввиду возможности безаварийной работы в одной координатной парадигме навигационного пространства с методическим обеспечением абсолютной точности судовождения.

Существующая до настоящего времени множественность применяемых геодезических систем координат создает очевидные неудобства для мореплавателей при спутниковых наблюдениях. Различия в географических координатах одной и той же точки на земной поверхности, отнесенных к различным геодезическим системам, могут достигать 700 м [37]. Такая величина фактического несоответствия места судна с координатами, нанесенными на морскую карту, имеет серьезное практическое значение с точки зрения обеспечения навигационной безопасности плавания. Для того, чтобы исключить это влияние, необходимо каждый раз согласовать систему координат карты и систему координат радиотехнического средства определения места судна.

Ввиду алгоритмических затруднений обработки информации при традиционном представлении о математической неформализуемости оперирования искаженными изолиниями данный вопрос ранее не рассматривался в научной литературе с геометрической точки зрения, вопреки классическим правилам математических основ судовождения. Выполненное исследование может принципиально изменить сформировавшуюся позицию на основе уточненного геометрического представления интерполяции кубическими базисными сплайнами абстрактной искаженной навигационной изолинии. Изложенная в работе точка зрения позволяет непосредственно использовать сетку искаженных поправками изолиний в графической обработке навигационной информации при широко применяемом в современном судовождении дифференциальном режиме. Искаженная изолиния имеет сложную математическую формализацию, поэтому классическим путем решить навигационную задачу при геометрической интерпретации в данном случае невозможно, в отличие от синтеза искаженных изолиний методами сплайн-интерполяции, который не представляет реальной математической проблемы с позиций аппарата кусочных аппроксимаций.

Выводы (Summary)

Проведенное исследование возможности синтезирования и компьютерной визуализации геометрически сложных изолиний и изоповерхностей на основе использования методов сплайн-функций позволяет сделать следующие выводы:

1. Разработана концепция использования искаженной изолинии в процессе обработки навигационной информации при широко используемом в современной спутниковой навигации дифференциальном режиме.
2. Обоснована оптимальность и эффективность применения кубических сплайнов для восстановления сложных изолиний при сравнительной оценке с альтернативными интерполянтами в качестве линейных, параболических и нерациональных сплайнов.
3. Проанализированы такие важные аспекты теории приближения функций, как свойство локальности и экстремальное свойство сплайнов. Даны рекомендации по практическому использованию рассматриваемых теоретических постулатов.
4. Представлена геометрическая интерпретация искаженной навигационной изолинии, формируемой при использовании поправок дифференциального режима ГЛОНАСС/GPS.
5. Выполнен обзор оценки точности современных возможностей дифференциального режима спутниковой навигации как альтернативы точного позиционирования положения.
6. Благодаря математически обоснованной устойчивости предложенных сплайновых алгоритмов исключено влияние человеческого фактора в автоматизированном генерировании навигационных изолиний и изоповерхностей за счет минимизации влияния неформализуемой исследовательской интуиции.
7. Разработано программное обеспечение высокого быстродействия для «гладкого» приближения разрывной навигационной изолинии или изоповерхности, сформированной из искаженных изолиний на основе методов кубической кусочной аппроксимации в интерактивной среде программирования «Турбо Паскаль» с возможностью компьютерной визуализации геометрических образов.
8. Сопоставимый результат в современных научных публикациях отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kvasov B.* Weighted cubic and biharmonic splines / B. Kvasov, T. W. Kim // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2017. — Vol. 57. — Is. 1. — Pp. 26–44. DOI: 10.1134/S0965542517010109.
2. *Taheri A.H.* Adaptive w-refinement: A new paradigm in isogeometric analysis / A.H. Taheri, K. Suresh // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* — 2020. — Vol. 368. — Pp. 113180. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113180.
3. *Taheri A. H.* Generalizations of non-uniform rational B-splines via decoupling of the weights: theory, software and applications / A. H. Taheri, S. Abolghasemi, K. Suresh // *Engineering with Computers.* — 2020. — Vol. 36. — Pp. 1831–1848. DOI: 10.1007/s00366-019-00799-w.

4. Han X. Bicubic B-spline surface constrained by the Biharmonic PDE / X. Han, J. Han // Applied Mathematics and Computation. — 2019. — Vol. 361. — Pp. 766–776. DOI: 10.1016/j.amc.2019.06.025.
5. Ююкин И. В. Модификация метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации навигационной изоповерхности / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 4. — С. 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
6. Chaudhuri A. B-Splines / A. Chaudhuri // Encyclopedia of Computer Graphics and Games. — Springer, Cham, 2019. — Pp. 1–11. DOI: 10.1007/978-3-319-08234-9_359-1.
7. Ююкин И. В. Интерполяция навигационной функции сплайном лагранжева типа / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 1. — С. 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.
8. Volkov Yu. S. Fifty years to Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation / Yu. S. Volkov, Yu. N. Subbotin // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2015. — Vol. 288. — Is. 1. — Pp. 222–237. DOI: 10.1134/S0081543815020236.
9. Волков Ю. С. О погрешности приближения простейшей локальной аппроксимацией сплайнами / Ю. С. Волков, В. В. Богданов // Сибирский математический журнал. — 2020. — Т. 61. — № 5. — С. 1000–1008. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.503.
10. Ююкин И. В. Сплайн-интерполяция навигационных изолиний / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 6. — С. 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
11. Дерябин В. В. Алгоритмизация счисления пути судна на основе нейросетевых технологий: автореф. дисс. ... д-ра техн. наук / В. В. Дерябин. — СПб., 2019. — 43 с.
12. Ююкин И. В. Применение метода сплайн-функций при компьютерной визуализации подводного рельефа / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 1. — С. 64–79. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-64-9.
13. Makarov A. A. On Two Algorithms of Wavelet Decomposition for Spaces of Linear Splines / A. A. Makarov // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 232. — Is. 6. — Pp. 926–937. DOI: 10.1007/s10958-018-3920-z.
14. Kvasov B. I. Parabolic B-splines in interpolation problems / B. I. Kvasov // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1983. — Vol. 23. — Is. 2. — Pp. 13–19. DOI: 10.1016/S0041-5553(83)80041-X.
15. Богданов В. В. Об условиях формосохранения при интерполяции параболическими сплайнами по Субботину / В. В. Богданов, Ю. С. Волков // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22. — № 4. — С. 102–113. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-102-113.
16. Ююкин И. В. Навигационное использование e-Logan в модификации с методом сплайн-функций / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 4. — С. 703–715. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-4-703-715.
17. Volkov Yu. S. Shape-preserving interpolation by cubic splines / Yu. S. Volkov, V. V. Bogdanov, V. L. Miroshnichenko, V. T. Shevaldin // Mathematical Notes. — 2010. — Vol. 88. — Is. 6. — Pp. 798–805. DOI: 10.1134/S0001434610110209.
18. Волков Ю. С. Сплайны как инструмент геометрического моделирования (к 80-летию со дня рождения Ю.С. Завьялова) / Ю. С. Волков, В. Л. Мирошниченко, С. И. Фадеев // Сибирские электронные математические известия. — 2011. — Т. 8. — С. А.11–А.16.
19. Volkov Yu. S. Convergence of Quartic Interpolating Splines / Yu. S. Volkov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2020. — Vol. 308. — Pp. 196–202. DOI: 10.1134/S0081543820020169.
20. Lukomskii S. F. On Binary B-splines of Second Order / S. F. Lukomskii, M. D. Mushko // Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics. — 2018. — Vol. 18. — Is. 2. — Pp. 172–182. — DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182.
21. Schoenberg, I. J. Contribution to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions / I. J. Schoenberg // Quarterly of Applied Mathematics. — 1946. — Vol. 4. — № 1. — Pp. 45–99. DOI: 10.1090/qam/15914.
22. Ююкин И. В. Оптимизация моделирования навигационной изоповерхности методами базисных финитных сплайнов / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 2. — С. 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.

23. *Wand M. P.* On semiparametric regression with O'Sullivan penalized splines / M. P. Wand, J. T. Ormerod // *Australian & New Zeland Journal of Statistics*. — 2008. — Vol. 50. — Is. 2. — Pp. 179–198. DOI: 10.1111/j.1467-842X.2008.00507.x.

24. *Valentin J.* Gradient-Based Two-Scale Topology Optimization With B-Splines on Sparse Grids / J. Valentin, D. Hübner, M. Stingl, D. Pflüger // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2020. — Vol. 42. — Is. 4. — Pp. B1092–B1114. DOI: 10.1137/19M128822X.

25. *Ююкин И. В.* Аппроксимация геоида методами сплайн-функций / И. В. Ююкин // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2020. — Т. 12. — № 2. — С. 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.

26. *Ююкин И. В.* Поиск ошибок в базе навигационных данных методом визуализации сплайновой изоповерхности / И. В. Ююкин // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2020. — Т. 12. — № 3. — С. 481–491. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-3-481-491.

27. *Chaudhuri A.* Shape Deformation Models / A. Chaudhuri // *Encyclopedia of Computer Graphics and Games*. — Springer, Cham, 2019. — Pp. 1–10. DOI: 10.1007/978-3-319-08234-9_358-1.

28. *Bogdanov V. V.* Shape-Preservation Conditions for Cubic Spline Interpolation / V. V. Bogdanov, Yu. S. Volkov // *Siberian Advances in Mathematics*. — 2019. — Vol. 29. — Is. 4. — Pp. 231–262. DOI: 10.3103/S1055134419040011.

29. *Ратнер Е. А.* Сплайн-интерполяция для построения трехмерных батиметрических моделей при картографировании внутренних водных путей / Е. А. Ратнер, А. И. Зайцев, М. А. Квасной // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2020. — Т. 12. — № 5. — С. 894–905. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-5-894-905.

30. *Wu Y.* Generating bicubic B-spline surface by a sixth order PDE / Y. Wu, C.-G. Zhu // *AIMS Mathematics*. — 2021. — Vol. 6. — Is. 2. — Pp. 1677–1694. DOI: 10.3934/math.2021099.

31. *Песков Ю. А.* Морская навигация с ГЛОНАСС/GPS / Ю. А. Песков. — М.: Моркнига, 2010. — 148 с.

32. *Каретников В. В.* Использование речной дифференциальной подсистемы ГЛОНАСС/GPS на внутренних водных путях Российской Федерации при проведении путевых работ / В. В. Каретников, Р. В. Волков, Г. В. Киселевич // *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2015. — № 3 (31). — С. 63–68. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-3-63-68.

33. *Jang J.* Improvement of Differential GPS Performance Using Range Measurements Between Satellites / J. Jang, S. Sung, Y. J. Lee // *International journal of Aeronautical and Space Sciences*. — 2020. — Vol. 21. — Is. 1. — Pp. 201–209. DOI: 10.1007/s42405-019-00198-x.

34. *Подкорытов А. Н.* Высокоточное местоопределение в глобальных навигационных спутниковых системах в абсолютном режиме за счет разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений: дис. ... канд. техн. наук / А. Н. Подкорытов. — М., 2014. — 195 с.

35. *Podkorytov A.* The influence of network structure on quality of satellite corrections for precise point positioning in GNSS / A. Podkorytov // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. — IOP Publishing, 2020. — Vol. 868. — Is. 1. — Pp. 012031. DOI: 10.1088/1757-899X/868/1/012031.

36. *Поваляев А. А.* Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов / А. А. Поваляев, А. Н. Подкорытов, С. А. Никитин, Д. В. Филимонова // *Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы*. — 2019. — Т. 6. — № 1. — С. 4–16. DOI: 10.30894/issn2409-0239.2019.6.1.4.16.

37. *Каврайский А. В.* О связи систем координат, используемых в морской картографии и навигации / А. В. Каврайский // *Навигация и гидрография*. — 1995. — № 1. — С. 21–25.

REFERENCES

1. Kvasov, Boris, and Tae-Wan Kim. “Weighted cubic and biharmonic splines.” *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 57.1 (2017): 26–44. DOI: 10.1134/S0965542517010109.

2. Taheri, Alizera H., and Suresh Krishnan. “Adaptive w -refinement: A new paradigm in isogeometric analysis.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 368 (2020): 113180. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113180.

3. Taheri, Alizera H., Saeed Abolghasemi, and Suresh Krishnan. “Generalizations of non-uniform rational B-splines via decoupling of the weights: theory, software and applications.” *Engineering with Computers* 36 (2020): 1831–1848. DOI: 10.1007/s00366-019-00799-w.

4. Han, Xuli, and Jing Han. "Bicubic B-spline surface constrained by the Biharmonic PDE." *Applied Mathematics and Computation* 361 (2019): 766–776. DOI: 10.1016/j.amc.2019.06.025.
5. Yuyukin, Igor V. "Modification of the least squares method for spline approximation of navigational isosurface." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.4 (2019): 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
6. Chaudhuri, Arindam. "B-Splines." *Encyclopedia of Computer Graphics and Games*. Springer, Cham, 2019. 1–11. DOI: 10.1007/978-3-319-08234-9_359-1.
7. Yuyukin, Igor V. "Interpolation of navigational function by lagrange type spline." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.1 (2020): 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.
8. Volkov, Yu S., and Yu N. Subbotin. "Fifty years to Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation." *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 288.1 (2015): 222–237. DOI: 10.1134/S0081543815020236.
9. Volkov, Yu. S., and V. V. Bogdanov. "On error estimates of local approximation by splines." *Siberian Mathematical Journal* 61.5 (2020): 1000–1008. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.503.
10. Yuyukin, Igor V. "Spline interpolation of navigational isolines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.6 (2019): 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
11. Deryabin, Victor V. *Algoritimizatsiya schisleniya puti sudna na osnove metodov neyrosetevykh tehnologii*. Abstract of Dr. Diss. SPb, 2019.
12. Yuyukin, Igor V. "Application of the spline-functions method in computer visualization of underwater relief." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.1 (2021): 64–79. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-64-79.
13. Makarov, Anton A. "On Two Algorithms of Wavelet Decomposition for Spaces of Linear Splines." *Journal of Mathematical Sciences* 232.6 (2018): 926–937. DOI: 10.1007/s10958-018-3920-z.
14. Kvasov, Boris I. "Parabolic B-splines in interpolation problems." *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 23.2 (1983): 13–19. DOI: 10.1016/S0041-5553(83)80041-X.
15. Bogdanov, V. V., and Yu. S. Volkov. "Shape preservation conditions under interpolation by Subbotin's parabolic splines." *Proceedings of Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS* 22.4 (2016): 102–113. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-102-113.
16. Yuyukin, Igor V. "Navigational use of e-Loran in modification with spline functions method." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.4 (2020): 703–715. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-4-703-715.
17. Volkov, Yu. S., V. V. Bogdanov, V. L. Miroshnichenko, and V. T. Shevaldin. "Shape-preserving interpolation by cubic splines." *Mathematical Notes* 88.6 (2010): 798–805. DOI: 10.1134/S0001434610110209.
18. Volkov, Yu. S., V. L. Miroshnichenko, and S. I. Fadeev. "Splines as a geometric modeling tool (to the 80 anniversary of the birth of Yu. S. Zav'yalov)." *Siberian Electronic Mathematical Reports* 8 (2011): A11–A16.
19. Volkov, Yu. S. "Convergence of Quartic Interpolating Splines." *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 308 (2020): 196–202. DOI: 10.1134/S0081543820020169.
20. Lukomskii, Sergey Feodorovich, and Maxim Dmitrievich Mushko. "On Binary B-splines of Second Order." *Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics* 18.2 (2018): 172–182. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182.
21. Schoenberg, Isaac Jacob. "Contribution to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions." *Quarterly of Applied Mathematics* 4.1 (1946): 45–99. DOI: 10.1090/qam/15914.
22. Yuyukin, Igor V. "Optimization of navigational isosurface simulation by the methods of basic finite splines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.2 (2019): 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.
23. Wand, Matt P., and John T. Ormerod. "On semiparametric regression with O'Sullivan penalized splines." *Australian & New Zeland Journal of Statistics* 50.2 (2008): 179–198. DOI: 10.1111/j.1467-842X.2008.00507.x.
24. Valentin, Julian, Daniel Hübner, Michael Stingl, and Dirk Pflüger. "Gradient-Based Two-Scale Topology Optimization With B-Splines on Sparse Grids." *SIAM Journal on Scientific Computing* 42.4 (2020): B1092–B1114. DOI: 10.1137/19M128822X.

25. Yuyukin, Igor V. “Geoid approximation by spline functions methods.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.2 (2020): 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.
26. Yuyukin, Igor V. “Search for errors in the base of navigation data by the method of spline isosurface visualization.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.3 (2020): 481–491. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-3-481-491.
27. Chaudhuri, Arindam. “Shape Deformation Models.” *Encyclopedia of Computer Graphics and Games*. Springer, Cham, 2019: 1–10. DOI: 10.1007/978-3-319-08234-9_358-1.
28. Bogdanov, Vladimir V., and Yuriy S. Volkov. “Shape-Preservation Conditions for Cubic Spline Interpolation.” *Siberian Advances in Mathematics* 29.4 (2019): 231–262. DOI: 10.3103/S1055134419040011.
29. Ratner, Elizaveta A., Aleksei I. Zaitsev, and Maksim A. Kvasnoy. “Spline interpolation for building three-dimensional bathymetric models at charting inland waterways.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.5 (2020): 894–905. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-5-894-905.
30. Wu, Yan, and Chun-Gang Zhu. “Generating bicubic B-spline surface by a sixth order PDE.” *AIMS Mathematics* 6.4 (2021): 1677–1694. DOI: 10.3934/math.2021099.
31. Peskov, Yuriy A. *Morskaya navigatsiya s GLONASS/GPS*. M.: Morkniga, 2010.
32. Karetnikov, Vladimir V., Roman V. Volkov, and Gennadiy V. Kiselevich. “To the question of use river differential subsystem GLONASS/GPS on the inland Russian waterways at carrying out of track works.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 3(31) (2015): 63–68. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-3-63-68.
33. Jang, JinHyeok, Sangkyung Sung, and Young Jae Lee. “Improvement of Differential GPS Performance Using Range Measurements Between Satellites.” *International Journal of Aeronautical and Space Sciences* 21.1 (2020): 201–209. DOI: 10.1007/s42405-019-00198-x.
34. Podkorytov, A. N. *Vysokotochnoe mestoopredelenie v global’nykh navigatsionnykh sputnikovyykh sistemakh v absolyutnom rezhime za schet razresheniya neodnoznachnosti psevdofazovykh izmerenii*. PhD Diss. M., 2014.
35. Podkorytov, Andrey. “The influence of network structure on quality of satellite corrections for precise point positioning in GNSS.” *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 868. No. 1. IOP Publishing, 2020. DOI: 10.1088/1757-899X/868/1/012031.
36. Povalyaev, Alexander A., Andrey N. Podkorytov, S. A. Nikitin, and D. V. Filimonova. “Algebraic Fundamentals to Process Measurements at High-Precision Absolute Positioning based on GNSS Signals with Code Division of Channels.” *Rocket-space device engineering and information systems* 6.1 (2019): 4–16. DOI: 10.30894/issn2409-0239.2019.6.1.4.16.
37. Kavraiskii, A.V. “O svyazi sistem koordinat, ispol’zuemykh v morskoi kartografii i navigatsii.” *Navigatsiya i gidrografiya* 1 (1995): 21–25.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ююкин Игорь Викторович —
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: enigma_777@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yuyukin, Igor V. —
PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: enigma_777@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 3 марта 2021 г.

Received: March 3 2021.