

SPLINE ALTERNATIVE TO THE MULTIPLICITY OF USING REFERENCE ELLIPSOIDS IN NAVIGATION

I. V. Yuyukin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The reality of the navigator's daily work with typographically published nautical charts focused on numerous reference ellipsoids is taken into account in the paper. The obligatory condition for the transformation of coordinates obtained using the data of the global satellite navigation system based on the Earth-wide coordinate system into the coordinates of the reference ellipsoid of the marine navigation chart is accentuated. Attention is drawn to the probability of a precedent of making a calculation error by a navigator with a standard recalculation of coordinates. Specific examples of discrepancies in the geographical coordinates of the same point on the Earth's surface attributed to different geodetic systems are given. The facts of the multiplicity of reference ellipsoids reserved in the memory of electronic devices for satellite positioning of the vessel are emphasized. The review of the coherence problems of geodetic coordinate systems for the correction of fixing position is carried out. The hypothesis of a cardinal solution to the problem of positioning a vessel on an electronic or paper chart when reorienting navigation to a spline geoid model with the condition of repurposing cartography on a new mathematical basis is put forward. The assumption about the real possibility of freeing the watch officer from the routine procedures of mathematical transformation of coordinates for various geodetic systems when using the spline model of the geoid as a single cartographic basis is made. As a proof of the efficiency of the proposed approach, a spline synthesis of a fragment of a three-dimensional perspective of the geoid isosurface of the Indian Ocean with local identification of the phenomenon of anomalous gravity loss is implemented. In parallel, the computing service of the Helmholtz Potsdam Research Center for Global Earth Models was used to chart the gravitational anomaly of the Indian Ocean and computer reconstruction of the pear-shaped geoid in 3D format. A comparative analysis is performed and the disadvantages of the traditional algorithm for approximating an equipotential surface based on the spherical harmonics method are revealed. It is argued for the multiple use of the developed approach in the long term when approximating a planetary equipotential shape with pulsating dynamics. A prediction for the principal possibility of achieving absolute navigation accuracy in the case of using a single spline geoid model in modern navigation is given.

Keywords: reference ellipsoids, spherical harmonics, coordinates transforming, earth — wide coordinate system, spline model of a geoid.

For citation:

Yuyukin, Igor V. "Spline alternative to the multiplicity of using reference ellipsoids in navigation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.6 (2021): 804–818. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-6-804-818.

УДК 656.61.052 656

СПЛАЙНОВАЯ АЛЬТЕРНАТИВА МНОЖЕСТВЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДОВ В СУДОВОЖДЕНИИ

И. В. Ююкин

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе учитывается реальность повседневной работы штурмана с изданными типографским способом морскими картами, ориентированными на многочисленные референц-эллипсоиды. Акцентируется обязательное условие преобразования координат, полученных при использовании данных глобальной спутниковой навигационной системы на основе общеземной системы координат, в координаты референц-эллипсоида морской навигационной карты. Обращается внимание на вероятность прецедента совершения расчетной ошибки судоводителем при стандартном пересчете координат. Приводятся конкретные примеры несовпадений в географических координатах одной и той же точки на земной поверхности, отнесенной

к различным геодезическим системам. Подчеркиваются факты множественности референц-эллипсоидов, зарезервированных в памяти электронных устройств спутникового позиционирования судна. Выполнен обзор проблематики согласования систем геодезических координат для коррекции обсервации. Выдвинута гипотеза кардинального решения проблемы позиционирования судна на электронной или бумажной карте при переориентировании навигации на сплайновую модель геоида с условием перепрофилирования картографии на новую математическую основу. Сделано предположение о реальной возможности освобождения вахтенного помощника от рутинных процедур математической трансформации координат для различных геодезических систем при использовании сплайновой модели геоида как единой картографической основы. В качестве доказательства работоспособности предлагаемого подхода реализуется сплайновое синтезирование фрагмента трехмерной перспективы геоидной изоповерхности Индийского океана с локальной идентификацией феномена аномальной потери гравитации. Параллельно использован сервис вычислений сайта Потсдамского научно-исследовательского центра глобальных моделей Земли имени Гельмгольца для картографирования гравитационной аномалии Индийского океана и компьютерной реконструкции грушевидной формы геоида в 3D-формате. Выполнен сравнительный анализ и выявлены недостатки традиционного алгоритма аппроксимации эквипотенциальной поверхности на базе метода сферических гармоник. Аргументируется многократное использование разработанного подхода в долгосрочной перспективе при аппроксимации планетарной эквипотенциальной формы с пульсирующей динамикой. Дан прогноз принципиальной возможности достижения абсолютной точности навигации в случае применения в современном судовождении единственной сплайновой модели геоида.

Ключевые слова: референц-эллипсоиды, сферические гармоники, преобразование координат, обще-земная система координат, сплайновая модель геоида.

Для цитирования:

Ююкин И. В. Сплайновая альтернатива множественности использования референц-эллипсоидов в судовождении / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 6. — С. 804–818. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-6-804-818.

Введение (Introduction)

Для рядового морского потребителя представляют интерес не технические точностные характеристики спутниковой системы, а реальная геометрия взаимного расположения обсервации и навигационных опасностей по маршруту следования судна для гарантированной безопасности прохождения препятствий в соответствии с концепцией *хорошей морской практики*. Существуют закономерные причины, по которым место судна, отображаемое на электронной карте или обозначенное на традиционной карте обсервация, не соответствует фактическому местоположению. Наиболее вероятной причиной несовпадения позиции условного точечного обозначения судна на дисплее электронно-картографической навигационно-информационной системы (ЭКНИС) с фактическими координатами местоположения является расхождение геодезической основы электронной карты и глобальной спутниковой навигационной системы. Указанная проблема, как правило, сравнительно просто устраняется приведением ЭКНИС и глобальной спутниковой навигационной системы к одной общеземной системе координат WGS-84. Ввиду того, что электронная карта отображается в системе WGS-84, а бумажная карта может быть изготовлена в другой геодезической системе различных вариантов исполнения широта и долгота одной и той же точки на бумажной и электронной картах могут существенно отличаться.

ЭКНИС функционирует при использовании в качестве Всемирной геодезической референцной системы WGS-84. Изданные типографским способом карты, ориентированные на различные референц-эллипсоиды, используются до сих пор в случае невыполнения любого из обязательных условий концепции «бесбумажной навигации». Вследствие этого вахтенный помощник обязан при нанесении спутниковой обсервации на традиционную морскую карту выполнять преобразования координат за счет учета поправок к географической широте и долготы для перехода от системы WGS-84 к системе координат бумажной карты. Преобразование координат, полученных при использовании данных спутниковой системы на основе общеземной системы координат, в координаты референц-эллипсоида морской навигационной карты является обязательным условием обеспечения практической высокоточной навигации.

В современной практике судовождения остается актуальной задача преобразования координат из одной геодезической системы в другую, поскольку сохраняется множественность применяемых референц-эллипсоидов. С математической точки зрения данная задача является трансформированием одной пространственной системы координат в другую, при котором положение произвольной точки референцной поверхности может быть выражено как в геодезических, так и в связанных с ними известными соотношениями прямоугольных пространственных координатах [1], [2]. При несении вахты судоводитель должен постоянно акцентировать внимание на вводе поправок в географические координаты. Как правило, в предупреждении под заголовком карты указываются поправки для перехода от системы координат WGS-84 к системе координат бумажной карты, что позволяет обозначить точную спутниковую обсервацию традиционным способом. При этом вахтенный помощник обязан удостовериться в использовании эллипсоида WGS-84 в опциях настройки приемника GPS. При спутниковом определении места судна мореплаватель должен вводить поправки в координаты на основе информации легенды бумажной карты в случае выявленного несовпадения геодезических систем. Множественность систем координат определяется разными параметрами и ориентировкой различных эллипсоидов бумажных карт. Шаблонный пересчет координат создает вероятность прецедента расчетной ошибки. При ручной корректуре электронных карт по извещениям мореплавателей переход от эллипсоида бумажной карты к мировому эллипсоиду системы WGS-84 реализуется вводом поправок с обратным знаком к географической широте и долготе в соответствии с информацией легенды бумажной карты [3]. Неправильный учет поправок может спровоцировать ошибку судоводителя с возможными серьезными последствиями.

Эффект искусственной потери точности в судовых условиях нивелируется, если изменить настройку приемника спутниковой системы на указанный в легенде карты эллипсоид или внимательно вводить поправки на основе данных легенды бумажной карты. Переход к геодезической системе карты путем активации необходимого референц-эллипсоида в судовом приемнике является максимально логичным с точки зрения технологии ведения навигационной прокладки на бумажной карте. В указанном случае на дисплее приемника будут отображаться обсервованные координаты судна в геодезической системе, параметры которой вручную активированы самим судоводителем.

В ситуации невозможности программирования судоводителем бортового приемника спутниковых сигналов на определенную геодезическую систему существует режим исправления координат на основе постоянного ввода поправок из легенды карты как сдвига координат (offset) к системе WGS-84. При этом, фактически, реализуется автоматический переход к референц-эллипсоиду карты, так как на дисплее спутникового приемника отображается индикация географических координат, которые вахтенный помощник может непосредственно наносить на типографскую карту без каких-либо математических трансформаций. Во время работы в режиме исправления координат судоводителю необходимо рекомендовать каждый раз при переходе с карты на карту, в зависимости от масштаба карт и их геодезических систем, своевременно вводить новые поправки. Кроме того, судоводитель должен постоянно иметь в виду, что введенные поправки могут обнулиться при случайном отключении прибора или неосторожной активации опции очистки памяти приемника. В любом случае штурману необходимо соблюдать особую пунктуальность в момент преобразования координат при плавании в архипелажных водах и подходе к отдельным удаленным от материков островам во избежание навигационной аварии по причине остаточной неопределенности в координатах навигационных ориентиров из-за высокого уровня систематических и случайных ошибок координат удаленных геодезических пунктов.

В качестве доказательства понимания серьезности проблемы согласования координат Международной гидрографической организацией в 1983 г. было принято решение, в соответствии с которым при работе с картами масштаба крупнее 1:500000 морские издательские ведомства обязаны идентифицировать название системы координат бумажной карты, а судоводитель должен учитывать поправки, указанные под заголовком карты, для перехода от системы WGS-84 к геодезической основе данной карты [4]. При игнорировании подзаголовочной информации карты данные поправки могут

быть вычислены по упрощенным формулам акад. М. С. Молоденского. В табл. 2.24 Мореходных таблиц (МТ-2000) приведены расчеты параметров для перехода от системы WGS-84 в систему координат карты для восьмидесяти семи различных эллипсоидов [4].

Вычисление поправок и сравнение их с напечатанными на морской навигационной карте служит гарантированным способом исключения ошибок. Положительно себя зарекомендовал конвертер координат интернет-ресурсов Международной ассоциации геодезии. Для получения преобразованных координат в любой геодезической системе достаточно посетить специальный официальный сайт, выбрать необходимую опцию, задать координаты в исходной геодезической системе и идентифицировать геодезическую систему искомым координат.

Согласно рекомендациям по организации штурманской службы, расхождение координат, из-за использования различных эллипсоидов в различных географических районах Мирового океана, составляет диапазон 0,1–0,4 морские мили [5]. Различия в географических координатах одной и той же точки на земной поверхности, отнесенных к различным геодезическим системам, по мнению проф., лауреата Гос. премии СССР А. В. Каврайского, могут достигать до 700 м [6], что гарантированно превышает среднестатистическую ширину типичного фарватера, а, следовательно, учет этого обстоятельства, безусловно, является важным при плавании судна в стесненных навигационных условиях. Возможное расхождение по координатам в 700 м имеет серьезное практическое значение при плавании в узкостях. Существует другое мнение, согласно которому в результате различий систем координат электронной и бумажной карты ошибка, из-за пренебрежения ввода поправок, может составить на местности 350–400 м и более [3]. В любом случае показатель несоответствия в метрической системе фактического обсервованного места судна с координатами, нанесенными на бумажную карту, существенно занижает перспективу технических характеристик высокой точности стандартного спутникового определения координат до 10 м. Дифференциальный метод электронного местоопределения морских транспортных средств, обеспечивающий точность до 3–10 м [7], также не спасает ситуацию от потери действительной точности судовождения. Для того чтобы полностью исключить феномен несоответствия геодезических основ, судоводителю необходимо каждый раз согласовывать систему координат бумажной и электронной карты с системой координат радиотехнического средства определения места судна.

В утилите Datum Transformation системы ECDIS Navi-Sailor 4000 сконцентрировано 183 различных варианта геодезических систем с возможностью выбора судоводителем любого из зарезервированных эллипсоидов для расчета поправок перехода к системе WGS-84. Множественность существующих картографических основ препятствует правильности выбора вахтенного помощника из 183 различных вариантов геодезических систем, усложняя в то же время его обязанность проверки идентичности активированного в спутниковом приемоиндикаторе эллипсоида с геодезической основой бумажной карты. В памяти приемоиндикатора модели GP-37/GP-32 фирмы Furuno содержатся параметры 173 различных картографических систем [8]. В спутниковом приемоиндикаторе модели GP-500 фирмы Furuno многообразие эллипсоидов из 170 вариантов зарезервировано в оперативной памяти устройства [5]. В указанных ранее японских приемоиндикаторах существует возможность выбора судоводителем любой геодезической основы элементарным вводом трехзначного кода, соответствующего номеру определенного референц-эллипсоида из предлагаемого в меню общего списка различных геодезических систем. В табл. 2.23 МТ-2000 приведены параметры двадцати одного референц-эллипсоида, наиболее часто применяемых для построения морских карт [4].

Для обеспечения практических арифметических расчетов преобразования систем координат в судовых условиях и понимания важности проблемы Департаментом морского транспорта РФ в 1993 г. было издано «Информационное письмо Главморинспекции» № ГМИ- 01/14–211 с последующей его всеерной рассылкой по всем пароходствам, частным судоходным компаниям, зарегистрированным под российским флагом, и морским учебным заведениям. Данное письмо было разослано на все суда Министерства транспорта РФ и входило в перечень обязательных штурманских документов. В этом документе перечислены наиболее используемые модели

эллипсоидов, приведены поправки и коэффициенты для согласования географических координат, а также обращается внимание на важность учета поправок преобразования координат, так как в ситуации игнорирования поправок фактическое место судна не будет соответствовать координатам морской карты [9]. Принятие к сведению в штурманской службе «Информационного письма Главморинспекции» свидетельствует об обеспокоенности морской администрации Российской Федерации правильным пониманием проблемы преобразования различных систем координат практикующими судоводителями. Предложенный способ пересчета координат базировался на сокращенном варианте формул акад. М. С. Молоденского. Указанные в письме рекомендации необходимо расценивать как попытку унифицированного решения вопроса согласования различных геодезических систем при фактическом создании так называемого *штурманского способа пересчета координат*.

Принципиальное решение проблемы коррекции местоположения судна на электронной или бумажной карте кардинальным образом становится возможным при переориентировании навигации на сплайновую модель геоида с условием перепрофилирования картографии на новую математическую основу. При использовании сплайновой модели геоида как единой согласованной системы координат навигации появляется реальная возможность освободить вахтенного помощника от рутинных процедур трансформации координат для различных геодезических систем, что автоматически повышает стандарты безопасности современного судовождения, поскольку судоводитель получает дополнительное время для выполнения анализа навигационных ситуаций и принятия заблаговременного обоснованного решения по управлению судном.

Перспективность применения на современном водном транспорте сплайнового геоида в парадигме абсолютной точности навигации представляет самостоятельный практический интерес, автоматически задающий инновационный стимул перспективного повышения точности судовождения. Для практической реализации решения проблемы согласования геодезических систем координат на основе использования методов сплайн-функций сформулированы следующие задачи:

1. Обзор проблематики согласования систем геодезических координат для точного позиционирования судна.
2. Разработка сплайнового алгоритма аппроксимации геоида как альтернатива многообразию существующих референц-систем.
3. Компьютерное синтезирование фрагмента эквипотенциальной поверхности планеты как геометрическая интерпретация математического алгоритма.
4. Разработка прикладной паскаль-программы применительно к задаче компьютерной визуализации геоидной изоповерхности.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Для традиционного вычисления модели геоида используются спутниковые гравиметрические измерения в узлах картографической сетки с заданным шагом и последующей математической обработкой на основе применения конечного ряда различных вариантов гармоник [10]. Сравнительный анализ различных полученных геоидных моделей на основе гармоник позволяет предположить наличие погрешности при подборе коэффициентов, а в случае применения сферических гармоник обнаруживается зональная некондиционность подобранных параметров [11]–[13]. Геопотенциальные коэффициенты при формировании геоида подбираются таким образом, чтобы геодезическая основа отвечала точным данным на национальной территории страны производителя с игнорированием точности применяемых параметров в других географических регионах [11], [13].

В связи с отмеченным ранее фактом некорректности стандартных математических атрибутов представляется целесообразным математическое синтезирование геоидной изоповерхности на основе апробированной гибридной сплайновой модели при использовании данных спутниковой альтиметрии в формировании матрицы правой части первого уравнения представленной алгебраической системы [14]:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=-k}^{g+k+1} \sum_{j=-m}^{h+m+1} B_{i,k}(\varphi_q) B_{j,m}(\lambda_r) C_{i,j} &= F_{q,r} \text{ при } q=1, \dots, z_1; r=1, \dots, z_2; \\ \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i=-k}^{g+k+1} \sum_{j=-m}^{h+m+1} B_{i,k}(\varphi_q) L_{j,r}(\lambda_r) C_{i,j} &= 0 \text{ при } q=1, \dots, z_1; r=1, \dots, h; \\ \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i=-k}^{g+k+1} \sum_{j=-m}^{h+m+1} B_{j,m}(\lambda_r) L_{i,q}(\varphi_q) C_{i,j} &= 0 \text{ при } q=1, \dots, g; r=1, \dots, z_2; \\ \frac{1}{p} \sum_{i=-k}^{g+k+1} \sum_{j=-m}^{h+m+1} L_{i,q}(\varphi_q) L_{j,r}(\lambda_r) C_{i,j} &= 0 \text{ при } q=1, \dots, g; r=1, \dots, h, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где k, m — степени B -сплайна по координатным осям φ и λ соответственно;

g, h — максимальное количество узлов по координатным осям φ и λ соответственно;

$B_{i,k}(\varphi), B_{j,m}(\lambda)$ — «шапочные» функции базисного сплайна;

$C_{i,j}$ — матрица искоемых скалярных коэффициентов;

p — сглаживающий весовой коэффициент;

z_1, z_2 — максимальное число дискретных измерений датчиками геофизического поля по координатным осям φ и λ соответственно;

$L_{i,q}, L_{j,r}$ — ассоциированные множители сплайнов лагранжевого типа;

q, r — фактическое количество узлов на координатных осях φ и λ с учетом граничных условий.

Каждый частный случай использования сплайн-функций порождает многократность различных конкретных прикладных применений в процессе решения разноплановых навигационных задач. Как следует из анализа натурных испытаний маневренности судна, в практических экспериментах во многих случаях оказывается исключительно полезным применение B -сплайнов [15]. С математической точки зрения B -сплайн является реальной альтернативой многим аппроксимационным методам в вопросе точности синтезирования изогеометрических объектов [16]. В ситуации необходимости так называемого *суррогатного моделирования* сложных динамически флуктуирующих поверхностей в условиях неопределенности формирования трехмерного профиля изогеометрии оптимальную мотивацию эффективности аппроксимации организуют кубические B -сплайны ($k=3, m=3$) при использовании свойств финитных функций обеспечения точности дифференцируемости и интегрируемости функциональных зависимостей с быстродействием вычислительных реализаций [17], [18].

Вследствие выявленных преимуществ базисных функций представляется целесообразным в аспекте обработки навигационной информации отдать предпочтение перспективному сплайновому алгоритму с апробированным быстродействием и высокой точностью вычислений в отличие от классических методов. Поиск решения системы уравнений (1) может быть эффективно реализован на основе модернизированного *метода наименьших квадратов* [19]. Дополнительно необходимо учитывать тот факт, что вычислительная устойчивость расчетных процедур на основе сплайнов может быть дополнительно искусственно улучшена при условии применения оптимизационных схем организации узлов аппроксимации [20], [21] или введения дополнительных узлов одновременно слева и справа на сеточных отрезках для обеспечения лучших условий сплайнового приближения [22].

Теоретически геоид можно сформировать в виде конечного набора изолиний, каждая точка которых отвечает условию постоянства геоидальной высоты. При этом появляется возможность для синтезирования фигуры геоида на основе алгоритма *сплайн-интерполяции навигационных изолиний* [23]. При этом процедуру восстановления контура исследуемой гравитационной поверхности можно абстрактно представить как результат траекторного движения фиксированной интерполированной изолинии параллельно самой себе в трехмерном пространстве [24].

С практической точки зрения одномерный алгоритм проигрывает двумерной сплайн-аппроксимации по быстродействию, поскольку неизбежными являются дополнительные временные затраты на поиск конкретной изолинии при необходимости расчета в любой произвольной точке изоповерхности. В математическом смысле такой геоид может быть определен как некая имитационная трехмерная конфигурация, которая отстоит по сплайновым изолиниям на определенное количество метров выше или ниже референц-эллипсоида. Данная статичная модель становится абсолютно неадаптивной к восстановлению динамических пульсаций геоида при непрерывных физических флуктуациях гравитационной поверхности Земли. Представляется целесообразным признать двумерный алгоритм *B*-сплайновой аппроксимации единственной реальной альтернативой использованию множественности референц-эллипсоидов в современном судовождении.

Результаты (Results)

Сервис вычислений на сайте International Centre for Global Earth Models — ICGEM (Международного центра глобальных моделей Земли) Потсдамского научно-исследовательского отделения имени Гельмгольца (GFZ-Potsdam) позволяет выполнять расчеты гравитационных аномалий с заданной детальностью для любого района земного шара в нескольких вариантах различных моделей геоида по выбору пользователя. Под гравитационной аномалией понимается величина разности между гравитационным полем, аналитически продолженным из точки измерения вниз на высоту геоида, и нормальным полем на эллипсоиде в точке с соответствующими эллиптическими координатами. Для распространенной модели геоида EGM2008 такой расчет был выполнен для района Индийского океана ввиду его уникальной особенности локального обнаружения потери гравитационной массы [25].

На рис. 1 приведена репродуцированная с сайта <http://icgem.gfz-potsdam.de> карта гравитационной аномалии Индийского океана, ограниченная по широте 30° N – 28° S и долготе 60° E – 95° E в последовательности локальных квадратов с разрешением 1° × 1°.

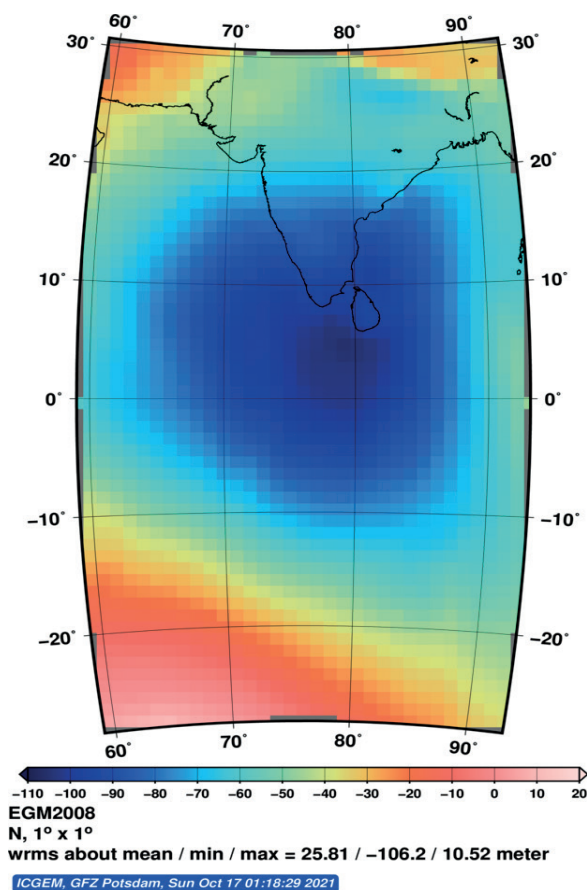


Рис. 1. Карта гравитационной аномалии Индийского океана

Мористее острова Шри-Ланка, идентифицируемого на рис. 1 по южной части узнаваемого контура п-ва Индостан, обозначено синее пятно феномена понижения геоида с минимумом в 106 м [5]. Внизу карты располагается шкала градуировки геоидной аномалии в метрической системе, выполненная в цветовой гамме, соответствующей содержанию фона карты по палитре яркостной раскраски.

На рис. 2 дана в аналогичных пределах картографирования по широте $30^{\circ}\text{N} - 28^{\circ}\text{S}$ и долготы $60^{\circ}\text{E} - 95^{\circ}\text{E}$ геометрическая интерпретация трехмерной визуализации геоидной изоповерхности Индийского океана, реализованная на основе метода двумерной *B*-сплайновой аппроксимации при использовании двенадцати сеточных точек по широте и восьми точек по долготы. Синхронно организуется матричный массив измерительных данных размерностью 8×12 при общем числе задействованных 96 точечных данных гравитационной аномалии по аналогии с математическим синтезированием батиметрического профильного рельефа подводной топографии Аляски [26].

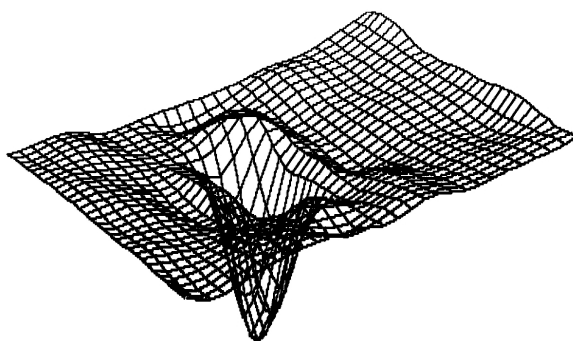


Рис. 2. Скриншот электронной перспективы геоидной изоповерхности Индийского океана

Для доказательства работоспособности предлагаемого подхода реализовано синтезирование фрагмента аномального поля гравитации Земли на основе перевода цветовой шкалы в цифровые значения в метрической системе по рис. 1 для создания перспективы геоидной изоповерхности Индийского океана, представленного на рис. 2 в трехмерном изображении. Анализ рис. 2 однозначно геометрически идентифицирует отрицательный вейвлетный всплеск в средней части скриншота как феномен потери гравитационной массы, обозначенный на рис. 1 концентрической областью синего цвета. При использовании вычислительных средств сайта ICGEM выполнена компьютерная визуализация в 3D-формате формы геоида EIGEN-6C4, представленной на рис. 3.

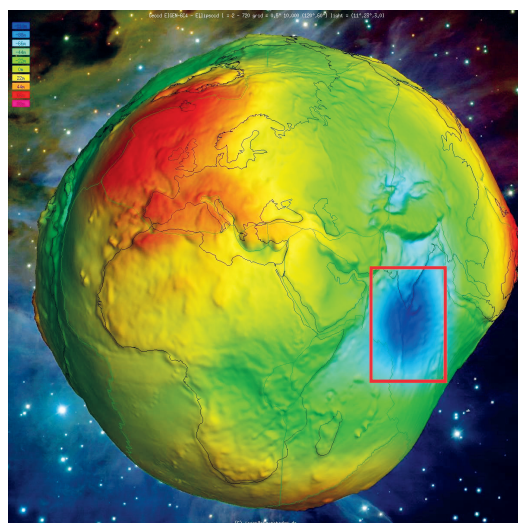


Рис. 3. Трехмерная визуализация современной модели геоида EIGEN-6C4

Область потери гравитационной массы в Индийском океане отмечена на рис. 3 красным прямоугольником с целью его однозначной идентификации для сравнительного анализа рис. 1 и 2. Как следует из рис. 2, максимальные отклонения эквипотенциальной поверхности характеризуются цифрой в пределах 100 м выше и ниже уровня WGS84, известные в научных публикациях как ундуляции геоида. Другой аномалией, обозначенной на рис. 2 красным цветом, является повышение геоида на 85 м в районе Исландии. Таким образом, диапазон максимальных ундуляций геоида составляет изученный интервал от -106 м до $+85$ м, равный по абсолютной величине 191 м [5].

Для сравнительной оценки классической формы геоида (см. рис. 3) и фигуры трехмерного изображения гравитационного поля Земли на основе подбора сферических коэффициентов реализована компьютерная визуализация традиционного алгоритма гармоник на базе вычислительных ресурсов сайта ICGEM. Как следует из детального рассмотрения представленной на рис. 4 модели геоида, сформированного на основе стандартного подхода, сферические гармоники только условно описывают форму эквипотенциальной поверхности при явной обнаруженной несхожести с известной грушевидной формой геоида (см. рис. 3), выполненной на основе системы точечных масс при помощи подробных спутниковых гравиметрических измерений по специальным программам GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) и GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) [5].

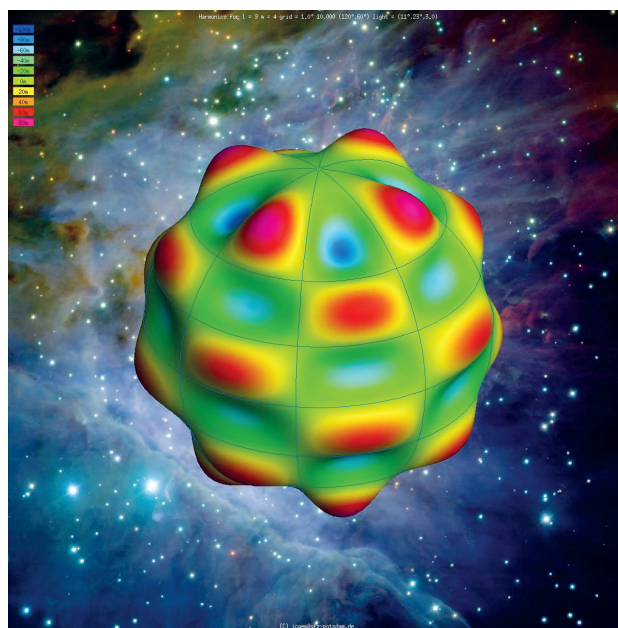


Рис. 4. Трехмерная визуализация сформированной на сферических гармониках модели геоида

В качестве дополнительного существенного недостатка методики комплексного определения характеристик гравитационного поля Земли по набору гармонических коэффициентов глобальных моделей геопотенциала необходимо отметить медленную внутреннюю сходимость традиционных вычислительных алгоритмов [27]. Проблематика математического восстановления формы геоида приобретает особую важность из-за необходимости синтеза пульсирующей формы уровенной поверхности Земли за счет физического явления непрерывных гравитационных флуктуаций. Различные причины перераспределения массы Земли вызывают постоянное изменение планетарного гравитационного поля [28]. В процессе постоянного уточнения формы геоида в орбиты навигационных спутников вводятся коррективы с целью повышения точности определения местоположения наземных потребителей.

В случае применения сплайновой аппроксимации нет необходимости полностью переформатировать гибридный алгоритм в случае обнаруженных изменений формы геоида. Обновляется

только матрица, сформированная в правой части первого уравнения системы (1), и на основе прежних формул *B*-сплайнов в комбинации со сплайнами лагранжева типа [29] может быть эффективно синтезирован новый геометрический облик гравитационной модели Земли. Эмпирически пересчетная трансформация реализуется за счет моментального перехода от сплайнового многообразия к физическому пространству, ориентированному на информацию реперных измерительных фиксаций [30].

Таким образом, разработанный подход является методом многоразового использования с долгосрочной перспективой применения при аппроксимации грушевидной планетарной формы с пульсирующей динамикой. В случае реализации варианта хранения программных сплайновых модулей в памяти бортовых вычислительных средств обеспечивается преимущество в оперативной возможности корректировки массива данных спутниковых гравиметрических измерений по мере обновления информации. При этом достигается высокая точность пульсирующих вычислений аномалий геоида вследствие возможности использования уточненных измерений контрольных станций спутникового слежения. В случае обнаружения расхождений измерительных данных с общепринятой моделью автоматически неизбежно возникает необходимость реконструкции геоида [31]. Эффекты аномальных гравитационных пульсаций геоида оптимальным математическим образом могут учитываться при использовании унифицированного гибридного сплайнового алгоритма в виде конгломерата системы уравнений (1) без какого-либо алгоритмического переформатирования при использовании файла модификации гравиметрических данных. На основе новой информации измерений уточненная форма геоида будет пересчитана тем же высокоскоростным методом *B*-сплайновой аппроксимации без каких-либо конструктивных сложностей. В режиме реального времени появляется возможность использования в практических приложениях уточненной синтезированной изогеометрии геоида при постоянном обновлении спутниковой альтиметрической информации.

Обсуждение (Discussion)

Сложная структура гравитационного поля Земли, организуемая неправильностью формы планеты и неравномерным распределением масс в недрах, обуславливает трудности математической формализации формы геоида. Вследствие этого в практических приложениях фигура геоида заменяется эллипсоидом вращения с целью упрощения оперирования геодезическими координатами. Поверхность имитирующей форму Земли эллипсоида образует последовательность вращений эллипса определенного размера вокруг его малой оси при условии оптимизации угловой ориентации главных осей. Данная неравноценная геометрическая замена при работе штурмана со спутниковым приемоиндикатором автоматически порождает вторичную проблему как правильный учет высоты геоида над эллипсоидом для точного позиционирования на морской акватории подвижного объекта, поскольку для фиксации точки в евклидовом пространстве необходимо определить три координаты. Эллипсоид обеспечивает цели навигации в идеализированном варианте по причине того, что форма его поверхности близка к фигуре Земли и математический аппарат формализованных зависимостей для решения задачи вычисления координат точки на эллиптической поверхности является достаточно простым с возможностью использования данных в табулированном виде.

В различных государствах мира применяется несколько десятков различных геодезических систем [32]. Практически у каждой страны, интегрированной в логику международного судоходства, присутствует национальный атрибут в виде референц-эллипсоида как упрощенной государственной модели геоида с целью репродуцирования морских карт с минимальными искажениями на национальных территориях с учетом специфики географических особенностей. Ведущая морская держава для точного издания карт своей территории выбирает эллипсоид таких размеров и такой формы, чтобы он как можно ближе подходил к поверхности геоида в пределах государственной зоны влияния. При этом в других регионах земного шара расхождение эллипсоида и геоида по высоте может быть значительным и достигать десятки метров. Из практически обоснованного стремления к максимальной точности позиционирования подвижных объектов

в национальном регионе и возникает проблема множественности различных референц-эллипсоидов. Этимология термина «референц» объясняется тем, что все точки на реальной земной поверхности коррелятивно переносят на поверхность выбранного эллипсоида, используя заданную на нем систему геодезических координат в национальных интересах. Обычно референц-эллипсоиду присваивают название, состоящее из фамилии предложившего его ученого и года, когда он был введен. Центр референц-эллипсоида, как правило, не совпадает с центром масс Земли. Только один эллипсоид системы WGS-84 подобран не для отдельной страны, а для планеты в целом по критерию наименьшего расхождения с формой геоида. Центр масс общеземного эллипсоида совпадает с центром масс Земли. Таким образом, геоидную форму Земли неоправданно заменяют оптимально подобранной по размерам и ориентировке правильной фигурой с известной математической формализацией — эллипсоидом вращения.

Для практической применимости в судовождении точно описываемого формулами математического атрибута в виде эллипсоида используют определенные геодезические условия: объем условной фигуры Земли предполагается примерно равным объему геоида, большая полуось находится в плоскости экватора геоида, малая полуось совпадает по направлению с осью вращения Земли.

Использование удобной геодезической модели автоматически консервирует латентным образом методическую погрешность, нивелирующую технические успехи систем спутниковой навигации. Пренебрежение отклонением эллипсоида от геоида может привести к значительным, согласно современным стандартам безопасности судовождения, расхождениям координат. При определении местоположения судна спутниковая обсервация получится ориентированной на иллюзорную изоповерхность, поскольку морской подвижный объект всегда движется по водной акватории, являющейся фрагментом реальной геоидной поверхности нашей планеты. В случае применения в современном судовождении единственной сплайновой модели геоида, в принципе, нивелируется различие систем координат, определяемое разными параметрами эллипсоидов, взятых за математическую основу при производстве бумажной или электронной карты.

При программной реализации в бортовом компьютере алгоритмов на основе прогрессивной технологии теории приближения функций становится возможным оперировать данными почти с абсолютной точностью в практической навигации, отказавшись от традиционных математических стилизаций. При этом необходимо учитывать, что предлагаемый метод обработки навигационной информации на основе сплайн-функций не гарантирует надежность спутниковых обсерваций в условиях преднамеренных помех, спуфинг-атак и локальной недоступности сигналов ГНСС. Техническое решение указанной проблемы возможно за счет комплексирования спутниковой навигационной аппаратуры со средствами навигации, основанными на иных принципах работы [33]. Представляется целесообразным для эффективного решения этой задачи использовать возможности автономной помехозащищенной корреляционно-экстремальной навигации с целью обеспечения максимальной точности определения местоположения морского подвижного объекта при любых обстоятельствах следования по маршруту [34]–[36].

Выводы (Summary)

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. Представленный обзор проблематики согласования систем геодезических координат подтверждает актуальность выполненного научного исследования по перспективному ориентированию на единственную сплайновую геоидную модель.
2. Геометрически доказана работоспособность сплайнового алгоритма аппроксимации геоида как альтернативы множественности существующих референц-систем.
3. Разработанный сплайновый подход является методом многоразового использования с долгосрочной перспективой применения аппроксимации грушевидной планетарной формы Земли с пульсирующей динамикой.
4. Создана объективная причина практической возможности достижения абсолютной точности судовождения при устранении проблемы пересчета координат в различные геодезические системы.

5. Разработаны прикладные программы, объединенные пользовательским интерфейсом в турбо-паскалевской компьютерной «оболочке» применительно к задаче синтезирования и визуализации геоидной изоповерхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юнес Ж. А. Особенности преобразования координат из геоцентрической системы WGS-84 на проекцию Меркатора для условий низких широт / Ж. А. Юнес, М. Г. Мустафин // Геодезия и картография. — 2018. — Т. 79. — № 10. — С. 2–6. DOI: 10.22389/0016-7126-2018-940-10-2-6.
2. Чан Т. Ш. Алгоритм преобразования координат из геоцентрической системы в топоцентрическую и его применение при строительстве во Вьетнаме / Т. Ш. Чан, А. А. Кузин // Вестник СГУГиТ (Сибирского гос. ун-та геосистем и технологий). — 2019. — Т. 24. — № 1. — С. 59–71. DOI: 10.33764/2411-1759-2019-24-1-59-71.
3. Гагарский Д. А. Электронные картографические системы / Д. А. Гагарский. — СПб.: Морсар, 2017. — 224 с.
4. Мореходные таблицы (МТ-2000). — СПб.: ГУНИО МО, 2002. — 575 с.
5. Ююкин И. В. Аппроксимация геоида методами сплайн-функций / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 2. — С. 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.
6. Каврайский А. В. О связи систем координат, используемых в морской картографии и навигации / А. В. Каврайский // Навигация и гидрография. — 1995. — № 1. — С. 21–25.
7. Ююкин И. В. Синтез кубическими сплайнами искаженной изолинии в аспекте использования дифференциального режима спутниковой навигации / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 3. — С. 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358.
8. Operator's manual DGPS NAVIGATOR GPS NAVIGATOR model GP-37/GP-32. — Nishinomiya: Furuno Electric Co., Ltd., 2014. — 89 p.
9. Информационное письмо Главморинспекции Департамента морского транспорта РФ № ГМИ-01/14–211, 1993.
10. Milyukov V. K. Relativistic Reduction in High-Precision Measurements of the Earth's Global Gravity Field Using a Multipair Constellation / V. K. Milyukov, I. Yu. Vlasov, M. V. Sazhin, O. S. Sazhina, V. N. Sementsov // Astronomy reports. — 2020. — Vol. 64. — No. 5. — Pp. 447–457. DOI: 10.1134/S1063772920060049.
11. Муравьев Л. А. Общеземные базы данных гравитационного поля Земли на территорию приарктической части Уральского региона / Л. А. Муравьев // Уральский геофизический вестник. — 2019. — № 2 (36). — С. 46–53. DOI: 10.25698/UGV.2019.2.5.46.
12. Hasanov I. M. Comparison of the new gravity field model XGM2019e with other modern global models of the gravitational field for the Magadan region / I. M. Hasanov, L. A. Myravyev // Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects 2020. — European Association of Geoscientists & Engineers, 2020. — Vol. 2020. — Is. 1. — Pp. 1–5. DOI: 10.3997/2214-4609.2020geo112.
13. Хасанов И. М. Сравнение глобальных моделей гравитационного поля на территории Магаданской области / И. М. Хасанов, Л. А. Муравьев // Вестник Северо-Восточного научного центра ДВО РАН. — 2021. — № 3. — С. 82–89. DOI: 10.34078/1814-0998-2021-3-82-89.
14. Ююкин И. В. Поиск ошибок в базе навигационных данных методом визуализации сплайновой изоповерхности / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 3. — С. 481–491. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-3-481-491.
15. Nomura S. Applications of B-spline Approximation to the Analysis of Ship Manoeuvrability / S. Nomura // The Journal of Japan Institute of Navigation. — 1996. — Vol. 95. — Pp. 233–240. DOI: 10.9749/jin.95.233.
16. de Koster P. Extension of B-spline Material Point Method for unstructured triangular grids using Powell-Sabin splines / P. de Koster, R. Tielen, E. Wobbes, M. Moller // Computational Particle Mechanics. — 2021. — Vol. 8. — Is. 2. — Pp. 273–288. DOI: 10.1007/s40571-020-00328-3.
17. Rehme M. Uncertainty quantification for the Hokkaido Nansei-Oki tsunami using B-splines on adaptive sparse grids / M. Rehme, S. Roberts, D. Pfluger // ANZIAM Journal. — 2020. — Vol. 62. — Pp. C30–C44. DOI: 10.21914/anziamj.v62.16121.

18. *Rehme F. M.* B-splines on sparse grids for surrogates in uncertainty / F. M. Rehme, S. Roberts, D. Pflüger // Reliability Engineering & System Safety. — 2021. — Vol. 209. — Pp. 107430. DOI: 10.1016/j.ress.2021.107430.
19. *Ююкин И. В.* Модификация метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации навигационной изоповерхности / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 4. — С. 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
20. *Yeh R.* Fast Automatic Knot Placement Method for Accurate B-spline Curve Fitting / R. Yeh, Y. Nashed, T. Peterka, X. Tricoche // Computer-Aided Design. — 2020. — Vol. 128. — Pp. 102905. DOI: 10.1016/j.cad.2020.102905.
21. *Chen P.* Explicit Gaussian Quadrature Rules for C^1 Cubic Splines with Non-Uniform Knot Sequence / P. Chen, X. Li // Communications in Mathematics and Statistics. — 2021. — Vol. 9. — Is. 3. — Pp. 331–345. DOI: 10.1007/s40304-020-00220-9.
22. *Volkov Y. S.* De Boor-Fix functionals and Hermite boundary conditions in the polynomial spline interpolation problem / Y. S. Volkov // European Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 7. — Is. 1. — Pp. 396–403. DOI: 10.1007/s40879-020-00406-z.
23. *Ююкин И. В.* Сплайн-интерполяция навигационных изолиний / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 6. — С. 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
24. *Ююкин И. В.* Оптимизация моделирования навигационной изоповерхности методами базисных финитных сплайнов / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 2. — С. 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.
25. *Ningthoujam L. S.* Seismologists Search for the Indian Ocean's "Missing Mass" / L. S. Ningthoujam, S. S. Negi, D. K. Pandey // Earth & Space Science News. — 2019. — Vol. 100. DOI: 10.1029/2019EO120243.
26. *Ююкин И. В.* Применение метода сплайн-функций при компьютерной визуализации подводного рельефа / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 1. — С. 64–79. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-64-79.
27. *Голдобин Д. Н.* Разработка методики комплексного определения характеристик гравитационного поля по данным глобальных моделей геопотенциала: дис. ... канд. техн. наук / Д. Н. Голдобин. — Новосибирск, 2019. — 201 с.
28. *Ince E. S.* ICGEM — 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans / E. S. Ince, F. Barthelmes, S. Reibland, K. Elder, C. Foerste, F. Flechtner, H. Schuh // Earth System Science Data. — 2019. — Vol. 11. — Is. 2. — Pp. 647–674. DOI: 10.5194/essd-11-647-2019.
29. *Ююкин И. В.* Интерполяция навигационной функции сплайном лагранжева типа / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 1. — С. 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.
30. *Стародумов И. О.* Математическое моделирование структурно-фазовых превращений модифицированным методом кристаллического фазового поля: дис. ... канд. физ.-мат. наук / И. О. Стародумов. — Екатеринбург, 2019. — 106 с.
31. *Kopeikin S.* Normal gravity field in relativistic geodesy / S. Kopeikin, I. Vlasov, W. B. Han // Physical Review D. — 2018. — Vol. 97. — Is. 4 — Pp. 045020. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.045020.
32. *Каврайский А. В.* К вопросу преобразования навигационных морских карт из системы координат СК-42 в ПЗ-90.11 / А. В. Каврайский, А. М. Шарков // Навигация и гидрография. — 2019. — № 58. — С. 62–70.
33. *Ююкин И. В.* Навигационное использование e-Logan в модификации с методом сплайн-функций / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 4. — С. 703–715. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-4-703-715.
34. *Рыбаков Е. А.* Комплексирование аппаратуры потребителя глобальных навигационных спутниковых систем с аппаратурой корреляционно-экстремальной навигации по гравитационному полю Земли: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Е. А. Рыбаков. — М., 2021. — 16 с.
35. *Ююкин И. В.* Корреляционно-экстремальная навигация по геофизическим полям на основе использования сплайновой технологии / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 4. — С. 505–517. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-4-505-517.
36. *Бобров Д. С.* Разработка методов и средств создания навигационных гравитационных карт: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Д. С. Бобров. — Менделеево, 2020. — 23 с.

REFERENCES

1. Younes, Jade A., and Murat G. Mustafin. "The characteristics of transforming coordinates from the geocentric system WGS-84 for the Mercator projection under low latitudes conditions." *Geodezia i Kartografiya* 79.10 (2018): 2–6. DOI: 10.22389/0016-7126-2018-940-10-2-6.
2. Tran, Thanh Son, and Anton A. Kuzin. "Algorithm of transforming coordinates from a geocentric system to a topocentric system and its application in construction in Vietnam." *Vestnik of the Siberian State University of Geosystems and Technologies (SSUGT)* 24.1 (2019): 59–71. DOI: 10.33764/2411-1759-2019-24-1-59-71.
3. Gagarinskiy, Dmitriy A. *Elektronnyye kartograficheskie sistemy*. SPb.: Morsar, 2017.
4. *Morehodnye tablitsy* (MT-2000). SPb.: GUNIO MO, 2002.
5. Yuyukin, Igor V. "Geoid approximation by methods of spline functions." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.2 (2020): 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.
6. Kavraiskii, A. V. "O svyazi sistem koordinat, ispol'zuemykh v morskoi kartografii i navigatsii." *Navigatsiya i gidrografiya* 1 (1995): 21–25.
7. Yuyukin, Igor V. "Cubic spline synthesis of a distorted isoline in the aspect of using differential mode of satellite navigation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.3 (2021): 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358.
8. *Operator's manual DGPS NAVIGATOR GPS NAVIGATOR model GP-37/GP-32*. Nishinomiya: Furuno Electric Co., Ltd., 2014.
9. Informatsionnoe pis'mo Glavmorinspektcii Departamenta morskogo transporta RF № ГМИ-01/14–211, 1993.
10. Milyukov, Vadim K., Igor Yu. Vlasov, Mikhail V. Sazhin, Olga S. Sazhina, and Valerian N. Sementsov. "Relativistic Reduction in High-Precision Measurements of the Earth's Global Gravity Field Using a Multipair Constellation." *Astronomy reports* 64.5 (2020): 447–457. DOI: 10.1134/S1063772920060049.
11. Muravyev, Lev A. "Global databases of the Earth's gravitational field for the arctic part of the Urals." *Ural'skiy geofizicheskiy vestnik* 2(36) (2019): 46–53. DOI: 10.25698/UGV.2019.2.5.46.
12. Hasanov, Ibragim M., and Lev A. Muravyev. "Comparison of the new gravity field model XGM2019e with other modern global models of the gravitational field for the Magadan region." *Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects 2020. Vol. 2020. No. 1. European Association of Geoscientists & Engineers, 2020*. 1–5. DOI: 10.3997/2214-4609.2020geo112.
13. Khasanov, Ibragim M., and Lev A. Muravyev. "Comparison of global models of the gravitational field in the territory of Magadan oblast." *Bulletin of the North-East Science Centre* 3 (2021): 82–89. DOI: 10.34078/1814-0998-2021-3-82-89.
14. Yuyukin, Igor V. "Search for errors in the base of navigation data by the method of spline isosurface visualization." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.3 (2020): 481–491. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-3-481-491.
15. Nomura, Shihei. "Applications of B-spline Approximation to the Analysis of Ship Manoeuvrability." *The Journal of Japan Institute of Navigation* 95 (1996): 233–240. DOI: 10.9749/jin.95.233.
16. de Koster, Pascal, Roel Tielen, Elizaveta Wobbes, and Matthias Moller. "Extension of B-spline Material Point Method for unstructured triangular grids using Powell-Sabin splines." *Computational Particle Mechanics* 8.2 (2021): 273–288. DOI: 10.1007/s40571-020-00328-3.
17. Rehme, Michael, Stephen Roberts, and Dirk Pflüger. "Uncertainty quantification for the Hokkaido Nansei-Oki tsunami using B-splines on adaptive sparse grids." *ANZIAM Journal* 62 (2020): C30–C44. DOI: 10.21914/anziamj.v62.16121.
18. Rehme, Michael F., Fabian Franzelin, and Dirk Pflüger. "B-splines on sparse grids for surrogates in uncertainty quantification." *Reliability Engineering & System Safety* 209 (2021): 107430. DOI: 10.1016/j.res.2021.107430.
19. Yuyukin, Igor V. "Modification of the least squares method for spline approximation of navigational isosurface." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.4 (2019): 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
20. Yeh, Raine, Youssef S. G. Nashed, Tom Peterka, and Xavier Tricoche. "Fast Automatic Knot Placement Method for Accurate B-spline Curve Fitting." *Computer-Aided Design* 128 (2020): 102905. DOI: 10.1016/j.cad.2020.102905.

21. Chen, Peng, and Xin Li. "Explicit Gaussian Quadrature Rules for C^1 Cubic Splines with Non-Uniform Knot Sequence." *Communications in Mathematics and Statistics* 9.3 (2021): 331–345. DOI: 10.1007/s40304-020-00220-9.
22. Volkov, Yuriy S. "De Boor-Fix functionals and Hermite boundary conditions in the polynomial spline interpolation problem." *European Journal of Mathematics* 7.1 (2021): 396–403. DOI: 10.1007/s40879-020-00406-z.
23. Yuyukin, Igor V. "Spline interpolation of navigational isolines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.6 (2019): 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
24. Yuyukin, Igor V. "Optimization of navigational isosurface simulation by the methods of basic finite splines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.2 (2019): 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.
25. Ningthoujam, Lachit S., Sanjay S. Negi, and Dhananjai K. Pandey. "Seismologists Search for the Indian Ocean's "Missing Mass"." *Earth & Space Science News* 100 (2019). DOI: 10.1029/2019EO120243.
26. Yuyukin, Igor V. "Application of the spline-functions method in computer visualization of underwater relief." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.1 (2021): 64–79. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-64-79.
27. Goldobin, Denis N. *Razrabotka metodiki kompleksnogo opredeleniya kharakteristik gravitatsionnogo polya po dannym global'nyh modeley geopotentsiala*. PhD Diss. Novosibirsk, 2019.
28. Ince, Elmas Sinem, Franz Barthelmes, Sven Reibland, Kirsten Elger, Christoph Foerste, Frank Flechtner, and Harald Schuh. "ICGEM — 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans." *Earth System Science Data* 11.2 (2019): 647–674. DOI: 10.5194/essd-11-647-2019.
29. Yuyukin, Igor V. "Interpolation of navigational function by lagrange type spline." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.1 (2020): 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.
30. Starodumov, Ilya O. *Matematicheskoe modelirovanie strukturno-fazovykh prevrasheniy modifitsirovannym metodom kristallizatsionnogo fazovogo polya*. PhD Diss. Yekaterinburg, 2019.
31. Kopeikin, Sergei, Igor Vlasov, and Wen-Biao Han. "Normal gravity field in relativistic geodesy." *Physical Review D* 97.4 (2018): 045020. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.045020.
32. Kavraysky, Alexander V., and Andrey M. Sharkov "To the question of converting navigational charts from the coordinate system SK-42 to PZ-90.11." *Navigatsiya i gidrografiya* 58 (2019): 62–70.
33. Yuyukin, Igor V. "Navigational use of e-Loran in modification with spline functions method." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.4 (2020): 703–715. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-4-703-715.
34. Rybakov, Evgeniy A. *Kompleksirovanie apparatury global'nykh navigatsionnykh sputnikovykh sistem s apparatury korrelyatsionno-ekstremal'noy navigatsii po gravitatsionnomu polu Zemli*. Abstract of PhD Diss. M., 2021.
35. Yuyukin, Igor V. "Correlation-extreme navigation through geophysical fields based on the use of spline technology." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.4 (2021): 505–517. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-4-505-517.
36. Bobrov, Dmitriy S. *Razrabotka metodov i sredstv sozdaniya navigatsionnykh gravitatsionnykh kart*. Abstract of PhD Diss. Mendeleevo, 2021.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ююкин Игорь Викторович —
 кандидат технических наук, доцент
 ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
 С. О. Макарова»
 198035, Российская Федерация,
 г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
 e-mail: enigma_777@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yuyukin, Igor V. —
 PhD, associate professor
 Admiral Makarov State University of Maritime
 and Inland Shipping
 5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg,
 198035, Russian Federation
 e-mail: enigma_777@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 8 ноября 2021 г.
 Received: November 8, 2021.