

OPTIMAL SPLINE TRAJECTORY OF THE SHIP INFORMATIVE ROUTE IN THE MAP-AIDED NAVIGATION

I. V. Yuyukin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The task of organizing an informative route as an optimal spline trajectory of a moving object with an assessment of the informativeness of the map-aided navigation standard is completed. From the perspective of the planning approach, an optimal geometric path, passing through pre-determined iconic intermediate points, taking into account the avoidance of navigational hazards as “obstacle spots” has been formed. Within the framework of the strategy of informative planning of the spline path, the actuality of solving the problem of synthesizing the optimal trajectory in two variants is noted: by the methods of B-splines and classical polynomial interpolations as the implementation of the tactics of a mobile object movement in a conflict environment. A comparative characteristic of two alternative algorithms for solving the problem, specifying the advantages and disadvantages of each option, is given. As a demonstration of the practical applicability of the interpolation approach, the spline trajectory of an illustrative example in route of map-aided navigation is designed against the background of a contour map of isolines. Emphasis is placed on the possibility of forming the shape of the navigation isosurface due to the effective use of the curvature of the spline trajectory as a reproductive template for constructing an axonometric projection. A forecast about the trends of the possible use of a separate optimal trajectory of the object movement directly for the construction of the informative field profile of any degree of complexity is made. A hypothesis about the feasibility of practical use of chaotic architecture of spline gradients for effective planning of the optimal trajectory is put forward. The fan of spline gradient vectors with a personal orientation in the direction of the maximum change in the navigation function on each segment of the piecewise polyline of the path in the vessel routing procedure is considered. The issue of ensuring the possibility of making a coordinated decision on the vessel management by personnel due to the automated formation of spline trajectories in real time with synchronous representation of geometric computer support to the watch assistant, which allows us to offer integration of the tasks under consideration into the cloud-based intelligent technology of “augmented reality” is formulated.

Keywords: optimal spline-trajectory, assessment of informativeness, “obstacle spots”, informative spline-path planning, spline-gradient, “augmented reality”.

For citation:

Yuyukin, Igor V. “Optimal spline trajectory of the ship informative route in the map-aided navigation.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 14.2 (2022): 230–247. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-2-230-247.

УДК 656.61.052 656

ОПТИМАЛЬНАЯ СПЛАЙН-ТРАЕКТОРИЯ ИНФОРМАТИВНОГО МАРШРУТА СУДНА В КОРРЕЛЯЦИОННО-ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

И. В. Ююкин

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе выполнена задача организации информативного маршрута как оптимальной сплайн-траектории движущегося объекта с оценкой информативности эталона корреляционно-экстремальной навигации. С позиций подхода планирования сформирован оптимальный геометрический путь, проходящий через заранее определенные знаковые промежуточные точки с учетом уклонения от навигационных опасностей как «пятен препятствий». В рамках стратегии информативного планирования сплайн-пути отмечается актуальность решения проблемы синтеза оптимальной траектории в двух вариантах: методами В-сплайнов и классических полиномиальных интерполяций как реализации тактики

движения мобильного объекта в конфликтной среде. Дана сравнительная характеристика по двум альтернативным алгоритмам решения задачи с уточнением преимуществ и недостатков каждого варианта. В качестве демонстрации практической применимости интерполяционного подхода спроектирована сплайн-траектория показательного примера в маршруте корреляционно-экстремальной навигации на фоне контурной карты изолиний. Сделан акцент на возможности формирования формы навигационной изоповерхности за счет эффективного использования кривизны сплайн-траектории как репродуктивного шаблона для построения аксонометрической проекции. Сделан прогноз о тенденциях возможного использования отдельной оптимальной траектории движения объекта непосредственно для построения любой степени сложности профиля информативного поля. Выдвинута гипотеза о допустимости практического использования хаотичной архитектуры сплайн-градиентов для эффективного планирования оптимальной траектории. Рассмотрен веер векторов сплайн-градиентов с персональной ориентировкой по направлению максимального изменения навигационной функции на каждом сегменте кусочной ломаной линии пути в процедуре маршрутизации судна. Сформулирован вопрос обеспечения возможности принятия согласованного решения по управлению судном персоналом за счет автоматизированного формирования сплайн-траекторий в режиме реального времени с синхронным представлением геометрического компьютерного сопровождения вахтенному помощнику, что позволяет предложить интегрирование рассматриваемых задач в облачную интеллектуальную технологию «дополненной реальности».

Ключевые слова: оптимальная сплайн-траектория, оценка информативности, «пятна препятствий», информативное планирование сплайн-пути, сплайн-градиент, «дополненная реальность».

Для цитирования:

Ююкин И. В. Оптимальная сплайн-траектория информативного маршрута судна в корреляционно-экстремальной навигации / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2022. — Т. 14. — № 2. — С. 230–247. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-2-230-247.

Введение (Introduction)

В настоящее время параллельно с процессом корреляционно-экстремальной навигации осуществляется синхронная задача организации информативного маршрута как наилучшей оптимальной траектории движущегося объекта в трехмерном евклидовом пространстве при стратегическом безопасном следовании в заданном направлении с учетом ограничительных препятствий [1]–[3]. Успешное решение задач безопасности судовождения находится в зависимости от умения судоводителей выбирать эффективную организацию процессов планирования маршрута, траектории движения и маневрирования судна на основе использования новых технологий интеллектуальных навигационных систем [4]. Следует отметить, что от оптимальности маршрута прямолинейно зависит физическая реализуемость точности удержания судна на заданной траектории, что является важнейшим фактором адаптивного управления движением в современном судовождении [5].

Оптимальность траектории рассматривается как аналогичная возможность уклонения от областей влияния недружественного наблюдателя [6]. Подобным образом данный подход согласуется с классической проработкой перехода судна с традиционностью мотивации удаления от навигационных опасностей. Корреляционно-экстремальная система, в которой используется связь параметров геофизических полей с географическими координатами судна, обладает всепогодностью, круглосуточностью использования и высокой помехозащищенностью а, следовательно, является альтернативой спутниковым системам навигации в ситуациях военных конфликтов, техногенных катастроф и спуфинг-атак [7]. В связи с потенциальными угрозами несанкционированного воздействия на ГНСС использование информативности геофизических полей является, по существу, хорошей альтернативой спутниковым системам по надежности с особенной актуальностью применения в области авиационной и морской навигации [8].

В соответствии с результатами эксперимента, проведенного при помощи автономного необитаемого подводного аппарата в Татарском проливе на примере трех пространственно-совмещенных геофизических полей (батиметрического, аномалий силы тяжести и геомагнитных аномалий), результирующая локальная погрешность определения координат современными корреляционно-экстремальными навигационными системами (КЭНС) составляет 5–15 м [9]. Полученные

экспериментальные данные сопоставимы с точностью современных спутниковых систем без учета возможностей дифференциального режима. При любых обстоятельствах локальной неопределенности спутниковых систем кардинальное решение проблемы их уязвимости возможно только за счет использования технических средств судовождения, основанных на иных физических принципах работы [10].

Ведущим исследователем прецизионного проекта магнитной навигации майором ВВС США, профессором Технологического института ВВС (Дейтон, Огайо) Аароном Дж. Канчиани успешно проводится разработка функциональных алгоритмов летных испытаний на основе навигации по магнитным аномалиям Земли как активных реалистичных тестах на конкретной платформе истребителя F-16 [11]. В качестве новейшего оборудования инерциальной навигационной системы в самолете используются сверхточные магнитометры на основе цезия с оптической накачкой для измерения скалярной интенсивности магнитного поля Земли и сравнения их с эталонной картой с использованием метода *фильтра Калмана*, что в идеальных условиях реальных экспериментов дает точность позиционирования до 13 м [12]. При сопоставимой точности с данными спутниковых систем командование ВВС США рассматривает возможность использования вариаций магнитного поля планеты для навигации летательных аппаратов как реальную альтернативу GPS.

Субъективность оценки оптимальности планируемого судоводителем маршрута при использовании традиционных методов его формирования не позволяет в полной мере выполнить качественную обработку необходимой информации. Ключевая задача навигации по планированию и автоматическому построению программного движения судна требует применения новых математических подходов решения [5]. Под такой интеллектуальной задачей навигации, как планирование траектории понимается синтез перевода транспортной единицы из некоторого исходного состояния в функционально-целевое путем фиксации его координат в конечно-мерном навигационном пространстве. В морской индустрии прослеживается аналогия данному подходу в реализованной необходимости безопасного следования судна из порта отхода в порт прихода в рамках актуальной концепции штурманской проработки эффективного перехода морем. С позиций подхода планирования траектории по методу дорожной карты формируется оптимальный геометрический путь от начальной до конечной точки, проходящий через заранее определенные знаковые промежуточные точки в навигационном пространстве с учетом уклонения от навигационных опасностей.

В качестве новых предложений решения задачи планирования траектории представляется целесообразным организовать генерирование безопасного сплайн-пути на основе алгоритма кубических сплайнов, позволяющего избежать избыточной сложности кусочных аппроксимаций и одновременно в полном объеме сконфигурировать тщательное планирование маршрута следования подвижного объекта [13], [14]. В рамках стратегии информативного планирования пути актуальность приобретает решение проблемы моделирования оптимальной траектории методами *B*-сплайнов и классических полиномиальных интерполяций как реализации тактики движения мобильного объекта в конфликтной среде [15]. Наилучшее с позиций навигации непосредственное планирование оптимальной траектории может быть реализовано эффективным способом на основе технологии *B*-сплайнов в комбинированной интеграции, например, с оригинальным алгоритмом на основе *графа Вороного* с учетом локальных минимумов при обеспечении целевой ориентации на обход статических препятствий, аппроксимируемых группой пересекающихся кругов, гарантированно фиксирующих последовательность опасностей [16].

В качестве доказательства дополнительного преимущества сплайн-функций необходимо отметить тот факт, что при конструировании любого базисного сплайна автоматически организуется потенциальное упрощение интерполяционной схемы на основе использования *свойства локальности*, позволяющего учесть характерные особенности траектории при локальном типе планирования [17], [18]. В соответствии с локальным характером кубического *B*-сплайна его выбор обеспечивает корректность аппроксимации искомой алгебраической кривой и удовлетворение свойствам гладкости, накладываемым в качестве напряженности на сплайновую траекторию.

Локальное свойство финитности потенциально обеспечивает необходимость пересчета только части траектории при изменении, добавлении или удалении узловой точки в массиве сеточных данных, что выделяет *B*-сплайн из множества других способов [5]. В случае применения альтернативных сплайнам алгоритмов при добавлении новой контрольной точки или изменении существующей вся математическая конструкция полностью пересчитывается при затратном вычислительном ресурсе. Таким образом, базисными и полиномиальными сплайнами естественным образом описываются любая траектория искусственного объекта как с активными, так и инерционными отрезками движения.

Важным фактором успешного синтезирования траектории в КЭНС является информативность геофизического поля, которая может быть определена как для отдельной точки навигационного пространства, так и для траектории движения объекта на некоторой площади характерной поверхности «привязки» стохастической природы. Эффективным образом в виде эталонной карты может быть представлена информативность поля, характеризующегося неоднородностью по изотропным направлениям. Картографирование позволяет выделить информативные области поля, пригодные для целей навигации с дальнейшим их использованием для выбора информативного маршрута транспортного средства [19]. В сущности, постановка задачи поиска оптимальной траектории формулируется как планирование такой линии пути, на которой уточнение координат объекта происходит с достаточной для навигации точностью. Информированное планирование пути любого мобильного объекта имеет в современных условиях важнейшее значение для надежного обеспечения процесса навигации с целью достижения эффективной оптимизации движения при лидирующей роли экономии времени за счет сегментации целевого пространства с реализацией эффекта уклонения от «пятен препятствий» [20]. При этом необходимо отметить особую актуальность для современного судовождения возможности генерации энергосберегающей безопасной траектории с учетом географических особенностей маршрута следования для достижения экономической эффективности работы флота за счет оптимизации планирования сплайн-пути.

Практическое использование гармонизированного сплайнового маршрута позволит судоводителю прецизионно оценивать оптимизацию траектории движения судна в сложной обстановке усиленного трафика за счет эффективного контроля расстояния до окружающих линию пути навигационных опасностей при предполагаемом выводе графической информации сопровождения движения на дисплей средства отображения по выбору как в 3D-формате, так и в двумерном варианте. Применение в интегрированных системах разработанного подхода позволяет минимизировать влияние ошибочных действий персонала, что является безусловно важным потенциалом безопасности судовождения, так как основной причиной 60–90 % крупных аварий в транспортных системах, таких как авиация и судоходство, является человеческий фактор [21].

Идея синтезирования оптимальной траектории судна на основе сплайн-функций может быть применена в качестве интеллектуальной поддержки различных перспективных проектов стратегической технологии *e-Navigation*. Предлагаемый математический аппарат, например, может быть реализован для задачи гибкого планирования оптимальных маршрутов проекта «Efficient Flow» [22]. Сплайновая траектория может быть также задействована в специальном алгоритме планирования маршрута, разрабатываемого на основе технологии больших данных, с учетом развития ледовых полей и изменчивости погоды в рамках проекта *Sedna* с использованием человекоориентированного подхода, позволяющего команде судна, не имеющей практического опыта плавания в ледовых условиях, осуществлять безопасную навигацию в Арктике.

Актуальность прокладки нового многообразия конфигураций маршрутов в ранее блокированных льдом зонах обусловлена ситуацией существенного изменения ледовой картины в полярном регионе ввиду глобального потепления и полномасштабного освоения трассы Северного морского пути. Новое программное обеспечение на языке высокого уровня турбо-паскаль может дополнить платформу планирования маршрута базового модуля *Advanced Intelligent Routing* системы *A-Suite*, разработанной на основе последних достижений теории машинного обучения и предназначенной для противодействия ошибкам вахтенных помощников капитана.

За счет моделирования оптимальных сплайн-траекторий в режиме реального времени с синхронным представлением геометрического компьютерного сопровождения штурману автоматически обеспечивается возможность принятия согласованного решения по управлению судном, что позволяет предложить интегрировать решение рассматриваемых задач в облачную технологию «дополненной реальности» холдинга Wartsila.

В рамках практической организации оптимальной сплайн-траектории информативного маршрута судна в парадигме КЭНС сформулированы следующие задачи:

1. Аналитический обзор тенденций решения задачи корреляционно-экстремальной навигации с параллельным формированием оптимальной траектории сплайн-пути мобильного объекта.
2. Апробирование алгоритма интерполяции траектории базисными финитными сплайнами при обеспечении конструктивного сжатия массивов данных навигационных параметров.
3. Адаптация альтернативного высокоскоростного алгоритма классической полиномиальной сплайн-интерполяции для моделирования навигационной траектории.
4. Программная реализация для бортового компьютера сплайновых алгоритмов в двух исследуемых вариантах.
5. Графическая демонстрация построения навигационной траектории на основе B -сплайновой интерполяции и традиционным кусочно-полиномиальным методом.
6. Рассмотрение возможности практического применения разработанных алгоритмов и программного обеспечения к организации плавания морских автономных надводных судов по оптимальным сплайновым траекториям как инновационной перспективы удаленного управления флотом при прогрессивном развитии технических средств судовождения.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Навигационная функция $U = f(x, y)$ математически формализует внешний вид изолинейного плавания в локальной системе координат. Интерполяция навигационной функции реализуется за счет умножения узловых значений базисных финитных значений $y_i = B_i(x_i)$ на расчетные скалярные сплайновые коэффициенты c_i в каждом узле сеточного интервала при финальном суммировании полученных алгебраических элементов. Геометрическая интерпретация операции синтеза гипотетической траектории судна методами базисных сплайнов показана на рис. 1.

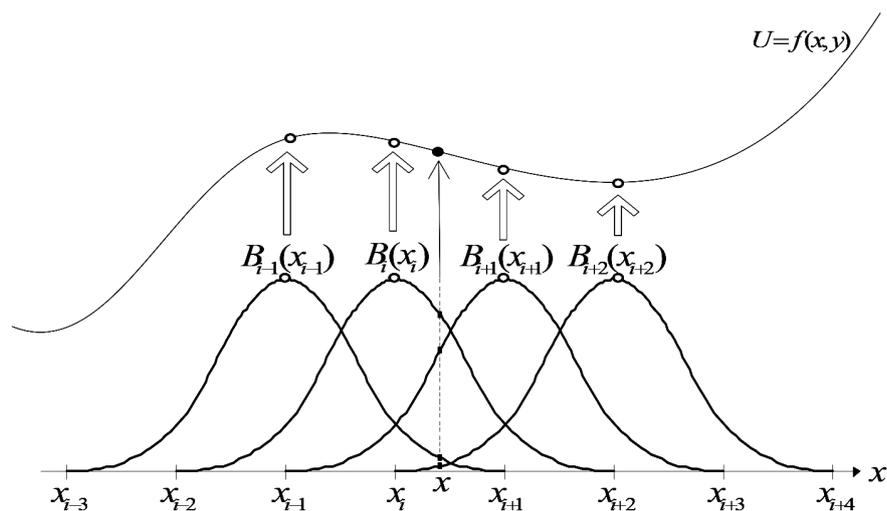


Рис. 1. Геометрическая интерполяция гипотетической траектории базисными сплайнами

Принципиальная идея кусочной интерполяции заключается в том, что весь интервал возможных значений аргумента навигационной функции разбивается на частичные сеточные отрезки, и на каждом из них фрагмент навигационной траектории приближенно заменяется сплайном.

Генерирование запланированной линии пути судна в каждой произвольной точке $x \in [x_i, x_{i+1}]$ сеточного интервала осуществляется на основе базисной сплайновой композиции при использовании четырех фрагментов сплайнов, получивших точку пересечения пунктирной линии в обозначении рис. 1 как символики необходимости реализации интерполированного вычисления в любой промежуточной координатной точке x :

$$S(x) = c_{i-1}B_{i-1}(x) + c_iB_i(x) + c_{i+1}B_{i+1}(x) + c_{i+2}B_{i+2}(x). \quad (1)$$

B -сплайн, формирующий по дискретным данным измерений навигационного параметра искусственную кусочную конструкцию, не является непосредственно фактическим фрагментом интерполируемой траектории. Приближенная к реальной алгебраической кривой сплайновая изолиния синтезируется методом умножения последовательности множителей «функций-крыш» $B_i(x)$ на скалярные коэффициенты $c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, c_{i+2}$ в каждой промежуточной точке E сеточного интервала по координатной оси (см. рис. 1). Следовательно, базисный сплайн представляет собой вторичную абстракцию по отношению к оригинальной траектории движения транспортной единицы, но фактологически служит ее максимально близким замещением [18].

В общем виде моделирование последовательности линейно независимых финитных функций $B_i(x)$ может быть представлено в соответствии с гипотезой Шёнберга в виде компактной алгоритмической комбинации:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i B_i(x), \quad (2)$$

где c_i — скалярные сплайновые коэффициенты, подлежащие математическому определению.

Матричная форма представления B -сплайнов позволяет получить явное решение задачи интерполяции [23]. Построение базисного интерполяционного сплайна в матричном исчислении с учетом граничных условий формируется в традиционной форме записи [24]:

$$\begin{bmatrix} L_1 & P_1 & 0 & K_1 \\ K_2 & L_2 & P_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & K_{N-1} & L_{N-1} & P_{N-1} \\ P_N & 0 & K_N & L_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^* \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ f_N^* \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $K_1 = 0$;

$$L_1 = B_1(x_1) - \frac{B'_1(x_1)}{B'_0(x_1)} B_0(x_1);$$

$$P_1 = B_2(x_1) - \frac{B'_2(x_1)}{B'_0(x_1)} B_0(x_1);$$

$$K_N = B_{N-1}(x_N) - \frac{B'_{N-1}(x_N)}{B'_{N+1}(x_N)} B_{N+1}(x_N);$$

$$L_N = B_N(x_N) - \frac{B'_N(x_N)}{B'_{N+1}(x_N)} B_{N+1}(x_N);$$

$$P_N = 0;$$

$$K_i = B_{i-1}(x_i);$$

$$L_i = B_i(x_i);$$

$$P_i = B_{i+1}(x_i);$$

f_i — дискретное измерение навигационного параметра;

$$f_1^* = f_1 - \frac{f_1'}{B_0(x_1)} B_0(x_1);$$

$$f_N^* = f_N - \frac{f_N'}{B_{N+1}'(x_N)} B_{N+1}(x_N).$$

Вычисление скалярных коэффициентов сплайновой конструкции (2) предполагает решение системы линейных алгебраических уравнений. Матрицы таких систем имеют трехдиагональную структуру. Вследствие этого *метод исключения Гаусса* реализуется по упрощенным формулам так называемого *алгоритма прогонки*. Вначале вычисляются по рекуррентным формулам коэффициенты V_i и W_i при $i = 1, \dots, N$:

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= 0; \\ W_0 &= 0; \\ V_i &= -\frac{P_i}{L_i + K_i V_{i-1}}; \\ W_i &= \frac{f_i - K_i W_{i-1}}{L_i + K_i V_{i-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Далее непосредственно вычисляются в обратном порядке неизвестные c_i , начиная с коэффициента c_N :

$$c_i = V_i c_{N+1} + W_i, \quad (5)$$

где i — индекс, убывающий от N до 1, а $c_{N+1} = 0$, так как $c_N = W_N$.

Необходимость использования найденных скалярных сплайновых коэффициентов c_i обусловлена умножением в каждом сеточном узле на «шапочные компоненты» $B_i(x_i)$ с целью реализации непосредственной процедуры сплайн-интерполяции как таковой. Прерогатива решения поставленной задачи ориентирована на кубический B -сплайн по причине стабильности вычислительной схемы данного варианта многозвенника при обоснованной возможности его эффективного использования в процедуре интерполяции [25].

Преимущество финитного сплайна по сравнению с классическим полиномиальным аналогом заключается в возможности четырехкратного компактного сжатия сплайнового массива данных при одинаковых показателях по характеристикам точности. Из-за конструктивной особенности базисной сплайновой структуры объем вычислительной информации сокращается в 4 раза при синтезировании траектории по сравнению с алгоритмом классической полиномиальной сплайн-интерполяции. При необходимости выполнения многочисленных траекторных расчетов на первый план выходит отмеченное ранее преимущество нетрадиционных для математических основ судовождения базисных сплайнов по факту алгоритмической возможности экономии оперативной памяти бортового компьютера.

В качестве дополнительного положительного аспекта применения кубических B -сплайнов необходимо отметить, что при динамичном построении траектории изменение одной из характеристических точек вызывает изменение только четырех последовательных сегментов, что означает возможность корректировки общей геометрической формы без перестройки всей линии в целом. Кубическая нестационарная схема B -сплайна оптимальным способом обеспечивает чувствительность контроля формы полученной кривой к исходным узловым значениям с целью генерирования линий различных видов [26].

Классический полиномиальный кубический сплайн, получаемый альтернативным методом по второму варианту, на каждом сеточном отрезке представляет собой кусочный многочлен третьей степени в качестве фактической замены навигационной траектории на каждом сеточном промежутке:

$$S_i(x) = A_i + B_i(x - x_i) + C_i(x - x_i)^2 + D_i(x - x_i)^3; \quad i = 1, \dots, N; \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (6)$$

где A_i, B_i, C_i, D_i — неизвестные скалярные сплайновые коэффициенты, подлежащие математическому определению.

После выполнения определенной математической трансформации и приведения подобных элементов в окончательном итоге получим [24]:

$$C_{i+1}h_{i+1} + 2C_i(h_i + h_{i+1}) + C_{i-1}h_i = 3 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \quad (7)$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$ — шаг сетки;

$i = 1, \dots, N - 1$;

N — общее количество узлов интерполяции по постановке задачи.

Решение системы (7) находится *методом прогонки*. По найденным коэффициентам C_i вычисляются коэффициенты B_i и D_i :

$$\left. \begin{aligned} D_i &= \frac{C_i - C_{i-1}}{3h_i}; \\ B_i &= C_i h_i - D_i h_i^2 + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $i = 1, \dots, N$.

Условия интерполирования определяют алгоритмическое равенство функциональных значений траектории сплайновому коэффициенту A_i в сеточных узлах:

$$A_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Альтернативный вариант обеспечивает высокоскоростной расчет любой навигационной задачи за счет логической оптимизации вычислительной структуры полиномиальной сплайн-интерполяции по сравнению с применением базисных финитных сплайнов.

Фактическое быстроедействие программной реализации классической сплайн-интерполяции достигается за счет оптимального представления формулы (6) по *схеме Горнера* с учетом вычислительной предпочтительности операции умножения вместо возведения в степень:

$$S_i(x) = \left[\left[D_i(x) + C_i \right] (x) + B_i \right] (x) + A_i; \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

По данным специально организованного эксперимента, априорная точность приближения любой траектории составляет порядок точности до шестого знака после запятой для любого расчетного варианта применения сплайн-функций [10]. Оптимизация сеточной последовательности узлов кубического сплайна является дополнительным важным критерием точности приближений к виду интерполируемой кривой любой степени геометрической сложности [27]. При организации расстановки сеточных данных предпочтение необходимо отдавать сплайнам с равномерными узлами в ситуации отсутствия в этом противоречия с постановкой задачи, так как экстремальная интерполяции для неравномерных сеток является функционально более сложной [28].

Расчет на базе классических полиномиальных сплайнов по результатам специально организованных вычислительных экспериментов дает результат увеличения быстрогодействия не менее 30 % по сравнению со стандартными подходами, что практически обеспечивает возможность выполнения навигационных вычислений в масштабе реального времени. Время работы программно-реализованных сплайновых алгоритмов замерялось в тысячных долях секунды с зацикливанием на 100 000 при решении одинаковых тестовых примеров. Традиционные сплайны показали эффективность в вопросах быстрогодействия при интерполяции навигационных траекторий, но уступают

базисным сплайнам по компактности хранения информации и гибким конструктивным особенностям базисных сплайн-функций.

Исследование вопроса навигационного использования сплайн-пути является универсальным приложением общего теоретического подхода к решению задач судовождения с позиций теории приближения функций. Под универсальностью подразумевается независимость любого сплайнового алгоритма от конкретного геометрического представления интерполируемой траектории. Геометрический формат линии движения судна определяется только объемом памяти бортового компьютера с сохраненными предварительно рассчитанными коэффициентами и сеточными параметрами для вычисления с высоким быстродействием значений интерполяций траектории в любой точке аргумента по номеру сеточного интервала.

Применение сплайновой технологии позволяет оперировать даже искаженными линиями пути в навигационных целях, так как синтез искаженных изолиний методами сплайн-функций не представляет реальной математической проблемы с позиций аппарата кусочных аппроксимаций [29].

Результаты (Results)

В качестве показательного практического примера оптимальная траектория спроектирована в маршруте корреляционно-экстремальной навигации на фоне контурной карты изолиний геофизического поля [30]. Структура поля эффективным образом синтезируется на основе гибридного алгоритма двумерной *B*-сплайновой аппроксимации с реализацией возможности корреляционно-экстремальной навигации по трехмерному рельефу как сравнительному эталону [31].

Полигон изолиний, представленных на рис. 2, моделировался как изотропное случайное поле с помощью специализированного пакета прикладных компьютерных программ GsTools [32]. Параметрами искомой траектории служит набор путевых точек, обозначенный на рис. 2 в виде желтых звездочек, задающих координаты вершин ломаной линии пути объекта.

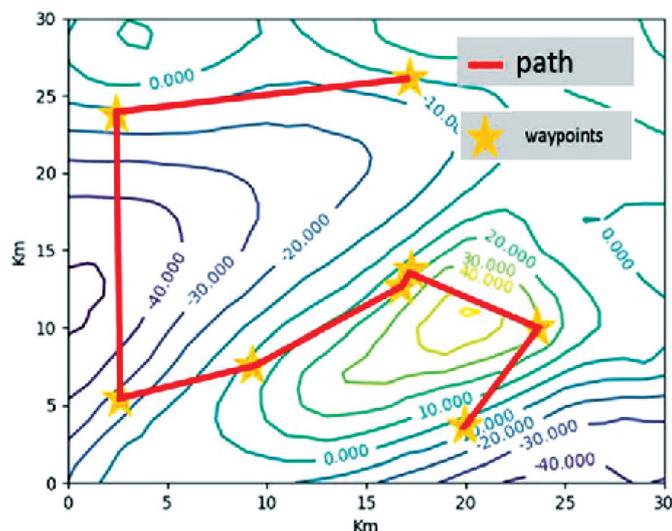


Рис. 2. Оптимальная траектория по контурной карте изолиний геофизического поля

Оптимальность траектории регулируется планированием маршрута с предпочтительным прохождением через информативные зоны характеристической изменчивости геофизического поля в виде аномальных участков возвышенности (концентрация бирюзово-желтых изолиний) и ложбины (концентрация сине-фиолетовые изолиний) для обеспечения наилучшей «привязки» к геофизическому ландшафту с целью достижения максимальной точности корреляционно-экстремальной навигации (см. рис. 1). Уклонение от навигационных опасностей может быть учтено за счет мгновенного перестроения сплайн-траектории на основе изменения штурманом данных о координатах характерных путевых точек.

Моделирование прямолинейной траектории, аналогичной приведенной на рис. 2, выполнено на основе полиномиальной сплайн-интерполяции первой степени в той же самой локальной километровой системе координат.

На скриншоте, представленном в виде рис. 3, смоделирована информативная часть сплайн-пути оригинальной траектории объекта, приведенной на рис. 2 с контурной картой изолиний геофизического поля. Для полной идентичности с контрольной ломано-прямолинейной траекторией на рис. 2 при синтезировании нового маршрута был применен линейный полиномиальный сплайн без эффекта сглаживания с целью достижения геометрической синхронизации с оригинальной линией пути. Под задачей сглаживания понимается построение достаточно гладкой функции, которая в контрольных точках незначительно отличается от значений исходной функции. Как следует из рис. 3, сплайновая траектория сформирована по шести знаковым точкам, снятым по координатам на рис. 2 и обозначенным компьютерными символами в виде звезды по аналогии с оригинальным рисунком.

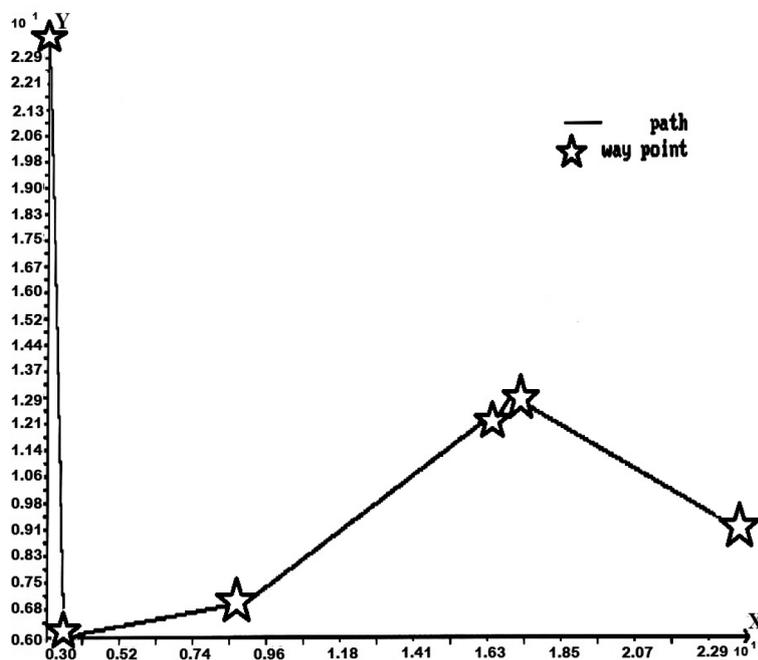


Рис. 3. Геометрическая интерпретация прямолинейной траектории при навигационном использовании фактора информативности

Аппроксимация траектории прямой линией, проводимой через заданные точки, является характерным вариантом для практического судовождения, так как при плавании судна всегда используются опорные точки, за которые обычно принимаются надежные наблюдения [33]. Сплайновые полиномы низкой степени обычно более пригодны для формирования проходящей через запланированную серию точек кривой. Однако полиномом первой степени нельзя описать соединение непредсказуемого произвольного ряда точек. В случае случайной расстановки узлов оптимальным является использование кубических сплайнов. Представленная на рис. 3 сплайн-траектория, в соответствии с геометрической интерпретацией теории аппроксимации, представляет собой аналог условной нити с фиксированным растяжением в разные стороны, при выполнении которого сама нить проходит между точечными алгоритмическими ограничениями с неизбежной финальной тенденцией вырождения в прямую линию в конечном итоге.

На скриншоте, представленном на рис. 4, показана оптимальная сложная линия сплайн-пути объекта, отличающаяся от прямолинейности оригинальной траектории (см. рис. 2 и 3) гибкостью геометрии движения, что, безусловно, является важным фактором для морской навигации ввиду возможности учета динамики инерционности транспортного средства. Результат изометрического

формирования траектории достигнут на основе вычислительной реализации кубического B -сплайна с учетом апробированной прерогативы показательного использования базисных сплайнов для реализованного синтезирования рельефа информационного поля [31].

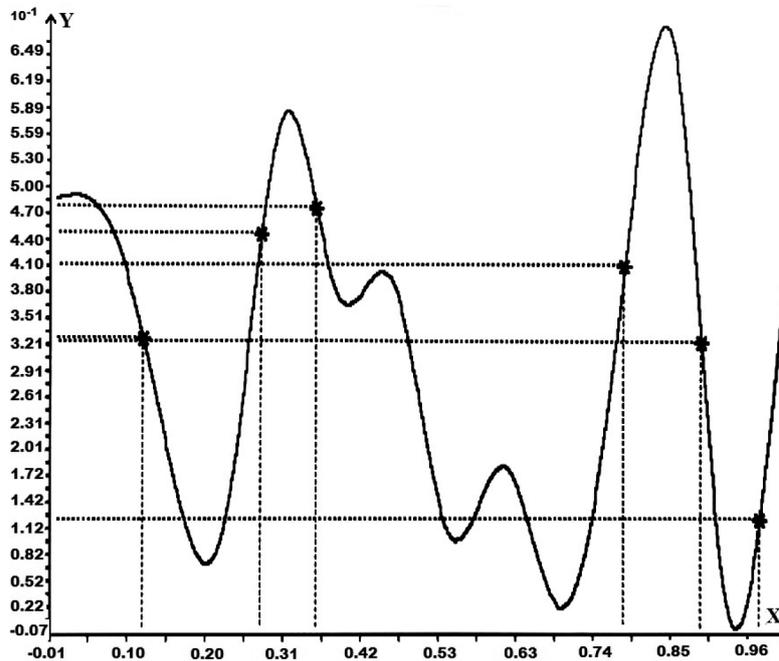


Рис. 4. Геометрическое моделирование аппроксимации криволинейной траектории кубическим базисным сплайном

Символом (*) на рис. 4 обозначены путевые точки, расстановка которых смоделирована случайным путем для демонстрации возможности кубического сплайна восстанавливать самую сложную траекторию при обязательном выполнении условия прохождения через все обозначенные путевые точки. Флуктуации сплайновой траектории можно нивелировать за счет варьирования задания граничных условий, которые в физической аналогии интерпретируются как степень внутренней напряженности сплайновой конструкции, оказывающей влияние на гибкость целикового кусочного конгломерата. С помощью сплайновой интерполяции можно обеспечить прохождение плоской кривой через все известные реперные точки, что и показано на рис. 4. Решение данной задачи дублировалось на основе альтернативного алгоритма кубической полиномиальной интерполяции, однако ввиду схожести полученных графических результатов в работе приводится только один скриншот синтезирования сложной траектории применительно к технологии базисных сплайнов.

Построение оптимальной траектории в корреляционно-экстремальной навигации автоматически решает проблему отказа от использования множественности референц-эллипсоидов при системном отсутствии практической необходимости работы с классической морской картой, изданной типографским способом [34], [35].

Обсуждение (Discussion)

Кубические базисные функции могут быть эффективным образом использованы для построения обобщенных кубических линий с параметрами формы путем интерполяции заданной пространственной характеристической кривой, в качестве которой может выступать оптимальная траектория [36]. В перспективе траекторию движения объекта становится возможным использовать непосредственно для построения волнообразной поверхности информативного поля КЭНС. Сложный трехмерный профиль проектируется на основе метода базисных функций путем построения локальных управляемых развертываемых поверхностей по заданной характеристической кривой как маршрутизатора линии кривизны.

Форму построенной поверхности можно корректировать и изменять целесообразным образом, эффективно используя параметры геометрического представления траектории. Если линия пути, подлежащая аппроксимации, имеет особенности в некоторых точках на сеточных интервалах, то она неточно приближается на всем интервале. Однако этой общей зависимости от локальных свойств можно избежать при использовании способности «склеенной» кусочной кривой к изгибанию в трехмерном пространстве.

Навигационные изолинии графически являются контурными линиями уровня навигационной изоповерхности при рассмотрении конкретного проекционного сечения. При этом процедура восстановления профиля исследуемой навигационной изоповерхности абстрактно представляется в виде результата траекторного движения одной сплайновой навигационной изолинии параллельно самой себе в трехмерном евклидовом пространстве [37]. Навигационную изоповерхность можно трактовать как контурным образом сконфигурированную поверхность точек равных значений навигационных параметров в объеме навигационного пространства [38].

Структура синтезированной эталонной навигационной изоповерхности является геометрически обусловленной одним характеристическим аппроксиматором в виде многозвенника как информативной траектории движения морского мобильного объекта. Оптимальная траектория играет лидирующую роль как информационный композитор геометрического образа навигационной изоповерхности. Для эффективного восстановления навигационной изоповерхности может быть использовано то, что измерительные ошибки датчиков следящих систем гарантированно обнаруживаются в виде шумовых пиковых флуктуаций на основе метода сплайновой визуализации скалярного поля навигационных параметров за счет нарушения «гладкости» смежных ячеек каркасной трехмерной перспективы [39].

Перспективную навигацию морского подвижного объекта можно осуществлять на основе измерений градиента планетарного магнитного поля с использованием показаний бортовых магнитных градиентометров [40]. Понятие сплайн-градиента можно признать основополагающим фактором, определяющим потенциал движения судна при изолинейном плавании с учетом меняющейся геометрической характеристики навигационного поля. Для максимальной информированности вахтенного помощника целесообразно рассматривать модель программированного движения судна в конфигурации с зоной навигационной безопасности при учете характеристик градиентов, которые также могут применяться для представления полей навигационных параметров [4]. Градиент можно рассматривать в виде единственного демаскирующего предиката в классическом его понимании как основного параметра навигационных измерений при его активном использовании в практических приложениях [41]. Под предикатом подразумевается ориентация направления максимального изменения определенной на множестве наборов значений объективных переменных функции, задающей отношения между объектами с представлением математической формализации существующих между ними взаимосвязей [5].

При бортовых измерениях компонента градиента как результата обработки данных авиационной магнитометрии трехмерной структуры на основе единого стохастического подхода могут быть точно определены навигационные параметры с целью эффективного решения задач автономной навигации в аэромагнитных системах [42]. В морской навигации с аналогичной эффективностью могут быть использованы измерения градиента для реализации автономного судовождения.

Градиентный подход может позволить наилучшим способом смоделировать сложную в математическом понимании пространственную структуру геофизического поля при фокусировании информативных областей на основе учета архитектуры изменчивости градиентов [43]. В практическом применении можно считать, что веер сплайн-градиентов обеспечивает реалистичность изометрического дизайна за счет учета многофакторности вероятных направлений максимальных увеличений навигационной функции, что реалистично отображает электронную перспективу рельефа поверхности. В некоторых случаях направление градиента поля произвольно меняется вдоль самой траектории. Поэтому любые упрощения градиентного подхода или игнорирование тщательного учета веера градиентов в информационном пространстве приводят к существенному

снижению точности навигации по причине «привязки» к областям геофизического поля с низким порогом информативности.

При постановке задачи генерирования оптимальной траектории судна сплайн-функциями автоматически подтверждается теоретическая допустимость практического использования веера градиентов, каждый из которых организован по каноническому правилу математических основ судовождения, но с персональной ортогональной ориентировкой на каждом сегменте кусочной ломаной линии пути в результирующей процедуре маршрутизации на всей области определения навигационной функции. Переход судна по любой траектории фактически выполняется по изолинии для максимального повышения точности КЭНС, что принципиально согласуется с концепцией навигационного пространства при теоретической допустимости изолинейного плавания.

Целесообразность применения сплайн-интерполяции траектории обосновывается экспертной возможностью быстрого вычисления навигационных параметров и их градиентов для оперативного установления таких атрибутов, как функционалы аналитических перегибов, интерпретируемые в математике как характерные точки смены знаков производных, соответствующих в практическом морском приложении сигналам автоматической подачи команд судовым средствам управления в виде руля и телеграфа при обеспечении заданной маршрутизации судна. Фактором, способствующим этому процессу, является то, что при известном градиенте сравнительно просто найти производную функции по любому направлению. Тем самым успешно используется понимание сплайн-градиента как расширенное толкование классического вектора градиента с единственным отличием в построении по нормали к сплайновому фрагменту, аппроксимирующему изолинию в данной окрестности области определения навигационной функции, а не к условной касательной линии или хорде.

Выводы (Summary)

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. Выполнен обзорный анализ проблематики планирования оптимальной траектории в корреляционно-экстремальной навигации на основе систематизации современной информации.
2. Обоснована целесообразность предпочтительности применения алгоритма интерполяции траектории базисными финитными сплайнами с обеспечением четырехкратного сжатия массивов данных навигационных параметров.
3. В качестве запасного альтернативного варианта математически адаптирован к решению задачи высокоскоростной алгоритм классической сплайн-интерполяции навигационной траектории.
4. На основе разработанного методического и алгоритмического обеспечения автоматизации моделирования навигационной траектории любой степени сложности предложены две программы, объединенные пользовательским интерфейсом в среде языка программирования высокого уровня турбо-паскаль для выполнения поставленной задачи на основе базисных финитных сплайнов и полиномиальной сплайн-интерполяции. Формализация алгоритмов прикладных программ обеспечивает высокую точность и устойчивость вычислительных процедур.
5. Выполнена геометрическая интерпретация построения навигационной траектории как скриншота графического сопровождения работы паскаль-программы сплайновой интерполяции.
6. Сделан прогноз о принципиальной возможности практического применения разработанных алгоритмов и программного обеспечения к удаленной организации плавания морских автономных надводных судов по оптимальным сплайновым траекториям в ходе реализации концепции безэкипажного судоходства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berdyshev V. I. Optimal Trajectory in R^2 under Observation / V. I. Berdyshev, V. B. Kostousov, A. A. Popov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2019. — Vol. 304. — Is. 1. — Pp. S31–S34. DOI: 10.1134/S0081543819020056.*

2. *Berdyshev V. I.* Characterization of Optimal Trajectories in R^3 / V. I. Berdyshev // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2019. — Vol. 305. — Is. 1. — Pp. S10–S15. DOI: 10.1134/S0081543819040035.
3. *Lavrenov R.* Modified Spline-Based Navigation: Guaranteed Safety for Obstacle Avoidance / R. Lavrenov, F. Matsuno, E. Magid // International Conference on Interactive Collaborative Robotics. — Springer, Cham, 2017. — Vol. 10459. — Pp. 123–133. DOI: 10.1007/978-3-319-66471-2_14.
4. *Васьков А. С.* Методологические основы управления движением судна и конфигурацией зоны навигационной безопасности: дис. ... д-ра техн. наук / А. С. Васьков. — СПб, 1998. — 291 с.
5. *Мироненко А. А.* Методология формализации навигационной обстановки, планирования маршрута и программных траекторий движения судна: дис. ... д-ра техн. наук / А. А. Мироненко. — Новороссийск, 2016. — 310 с.
6. *Berdyshev V. I.* Optimal Trajectory of an Observer Tracking the Motion of an Object Equipped with a Striking Device / V. I. Berdyshev // Doklady Mathematics. — Pleiades Publishing, 2021. — Vol. 104. — No. 1. — Pp. 221–224. DOI: 10.1134/S1064562421040037.
7. *Ююкин И. В.* Корреляционно-экстремальная навигация по геофизическим полям на основе использования сплайновой технологии / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 4. — С. 505–517. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-4-505-517.
8. *Minligareev V. T.* Geophysical Support of Advanced Autonomous Magnetometric Navigation Systems / V. T. Minligareev, T. V. Sazonova, D. A. Arutyunyan, V. V. Tregubov, Ye. N. Khotenko // Gyroscopy and Navigation. — 2020. — Vol. 11. — Is. 4. — Pp. 350–356. DOI: 10.1134/S2075108720040082.
9. *Dynaevskaya K. V.* Study of a Method for Calculating the Current Accuracy in Map-Aided Navigation Problem / K. V. Dynaevskaya, L. V. Kiselev, V. B. Kostousov // Gyroscopy and Navigation. — 2021. — Vol. 12. — Is. 1. — Pp. 50–60. DOI: 10.1134/S2075108721010041.
10. *Ююкин И. В.* Навигационное использование e-Logan в модификации с методом сплайн-функций / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 4. — С. 703–715. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-4-703-715.
11. *Canciani A.* Absolute Positioning Using the Earth's Magnetic Anomaly Field / A. Canciani, J. Raquet // NAVIGATION, Journal of the Institute of Navigation. — 2016. — Vol. 63. — Is. 2. — Pp. 111–126. DOI: 10.1002/navi.138.
12. *Canciani A.* Airborne Magnetic Anomaly Navigation / A. Canciani, J. Raquet // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System. — 2017. — Vol. 53. — Is. 1. — Pp. 67–80. DOI: 10.1109/TAES.2017.2649238.
13. *Лавренов Р. О.* Математическое и программное обеспечение решения задачи многокритериального поиска пути мобильного объекта: дис. ... канд. техн. наук / Р. О. Лавренов. — Казань, 2020. — 138 с.
14. *Лю В.* Построение траекторий и моделирование движения летательного аппарата в среде с препятствиями: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Лю. — М., 2018. — 15 с.
15. *Phan-Huu T.* A Time-optimal Trajectory Generation Approach with Non-uniform B-splines / T. Phan-Huu, V. H. Nguyen, U. Konigorski // International Journal of Control, Automation and Systems. — 2021. — Vol. 19. — Is. 12. — Pp. 3947–3955. DOI: 10.1007/s12555-020-0497-3.
16. *Lavrenov R.* Smart Spline-Based Robot Navigation on Several Homotopics: Guaranteed Avoidance of Potential Function Local Minima / R. Lavrenov // Proceedings of International Conference on Artificial Life and Robotics (ICAROB). — ALife Robotics Corporation Ltd, 2018. — Vol. 23. — Pp. 407–410. DOI: 10.5954/ICAROB.2018.OS7-7.
17. *Ююкин И. В.* Применение метода сплайн-функций при компьютерной визуализации подводного рельефа / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 1. — С. 64–79. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-64-79.
18. *Ююкин И. В.* Интерполяция навигационной функции сплайном лагранжева типа / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 1. — С. 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.
19. *Stepanov O. A.* Algorithm for Planning an Informative Route for Map-Aided Navigation / O. A. Stepanov, A. S. Nosov // 2021 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). — IEEE, 2021. — Pp. 1–5. DOI: 10.23919/ICINS43216.2021.9470825.
20. *Liang X.* Multi-Domain Informative Coverage Path Planning for A Hybrid Aerial Underwater Vehicle in Dynamic Environments / X. Liang, C. Liu, Z. Zeng // Machines. — 2021. — Vol. 9. — Is. 11. — Pp. 278. DOI: 10.3390/machines9110278.

21. *Титов А. В.* Состояние и перспективы реализации технологии e-Навигации / А. В. Титов, Л. Баракат, А. Хаизаран // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 4. — С. 621–630. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-621-630.
22. *Rivkin B. S.* e-Navigation: Five Years Later / B. S. Rivkin // Gyroskopy and Navigation. — 2020. — Vol. 11. — Is. 2. — Pp. 176–187. DOI: 10.1134/S2075108720020066.
23. *Liu X.* Extending Ball B-spline by B-spline / X. Liu, X. Wang, Z. Wu, D. Zhang, X. Liu // Computer Aided Geometric Design. — 2020. — Vol. 82. — Pp. 101926. DOI: 10.1016/j.cagd.2020.101926.
24. *Ююкин И. В.* Сплайн-интерполяция навигационных изолиний / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 6. — С. 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
25. *Kumar R.* Modified cubic B-spline qasi-interpolation numerical scheme for hyperbolic conservation laws / R. Kumar, A. Choudhary, S. Baskar // Applicable Analysis. — 2020. — Vol. 99. — Is. 1. — Pp. 158–179. DOI: 10.1080/00036811.2018.1489961.
26. *Zhang B.* A Generalized Cubic Exponential B-Spline Scheme with Shape Control / B. Zhang, H. Zheng, L. Pan // Mathematical Problems in Engineering. — 2019. — Vol. 2019. — Pp. 3057134. DOI: 10.1155/2019/3057134.
27. *Chen P.* Explicit Gaussian Quadrature Rules for C^1 Cubic Splines with Non-uniform Knot Sequences / P. Chen, X. Li // Communications in Mathematics and Statistics. — 2021. — Vol. 9. — Is. 3. — Pp. 331–345. DOI: 10.1007/s40304-020-00220-9.
28. *Субботин Ю. Н.* Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны / Ю. Н. Субботин, С. И. Новиков, В. Т. Шевалдин // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2018. — Т. 24. — № 3. — С. 200–225. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225.
29. *Ююкин И. В.* Синтез кубическими сплайнами искажённой изолинии в аспекте использования дифференциального режима спутниковой навигации / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 3. — С. 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358.
30. *Stepanov O. A.* Navigation informativity of geophysical fields in map-aided navigation / O. A. Stepanov, A. S. Nosov, A. B. Toropov // 2017 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS). — IEEE, 2017. — Pp. 1–19. DOI: 10.1109/InertialSensors.2017.8171509.
31. *Ююкин И. В.* Сплайновое синтезирование картографированного эталона информативности поля в задаче корреляционно-экстремальной навигации / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2022. — Т. 14. — № 1. — С. 25–39. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-1-25-39.
32. *Stepanov O. A.* A Map-Aided Navigation Algorithm without Preprocessing of Field Measurements / O. A. Stepanov, A. S. Nosov // Gyroskopy and Navigation. — 2020. — Vol. 11. — Is. 2. — Pp. 162–175. DOI: 10.1134/S207510872002008X.
33. *Мельник В. Г.* Методы обработки рядов траекторных измерений в системах прогнозирования и контроля движения судна: дис. ... канд. техн. наук / В. Г. Мельник. — Новороссийск, 2016. — 119 с.
34. *Ююкин И. В.* Сплайновая альтернатива множественности использования референц-эллипсоидов в судовождении / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 6. — С. 804–818. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-6-804-818.
35. *Ююкин И. В.* Аппроксимация геоида методами сплайн-функций / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 2. — С. 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.
36. *Hu G.* Constructed local controlled developable H-Bezier surfaces by interpolating characteristic curves / G. Hu, J. Wu, X. Wang // Computational and Applied Mathematics. — 2021. — Vol. 40. — Is. 6. — Pp. 216. DOI: 10.1007/s40314-021-01587-3.
37. *Ююкин И. В.* Оптимизация моделирования навигационной изоповерхности методами базисных финитных сплайнов / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 2. — С. 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.
38. *Ююкин И. В.* Модификация метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации навигационной изоповерхности / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 4. — С. 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.

39. Ююкин И. В. Поиск ошибок в базе навигационных данных методом визуализации сплайновой изоповерхности / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 3. — С. 481–491. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-3-481-491.

40. Volkovitskii A. K. Application of Magnetic Gradiometers to Control Magnetic Field of Moving Object / A. K. Volkovitskii, E. V. Karshakov, M. Yu. Tkhorenko, B. V. Pavlov // Automation and Remote Control. — 2020. — Vol. 81. — Is. 2. — Pp. 333–339. DOI: 10.1134/S0005117920020113.

41. Гузевич С. Н. Градиент — основной параметр навигационных измерений / С. Н. Гузевич // Метрология. — 2019. — № 3. — С. 46–55. DOI: 10.32446/0132-4713.2019-3-46-55.

42. Каршаков Е. В. Структура и алгоритмы обработки измерений в аэромагнитных и аэрэлектроматнитных системах: автореф. дис. ... д-ра техн. наук / Е. В. Каршаков. — М., 2018. — 46 с.

43. Yuyukin I. V. Configuring the fan of spline gradients when approximating the navigational isoline with a linear piecewise functional / I. V. Yuyukin // Journal of Physics: Conference Series. — IOP Publishing, 2021. — Vol. 2032. — № 1. — Pp. 012054. DOI: 10.1088/1742–6596/2032/1/012054.

REFERENCES

1. Berdyshev, V. I., V. B. Kostousov, and A. A. Popov. “Optimal Trajectory in R^2 under Observation.” *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 304.1 (2019): S31–S43. DOI: 10.1134/S0081543819020056.

2. Berdyshev, V. I. “Characterization of Optimal Trajectories in R^3 .” *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 305.1 (2019): S10–S15. DOI: 10.1134/S0081543819040035.

3. Lavrenov, Roman, Fumitoshi Matsuno, and Evgeni Magid. “Modified Spline-Based Navigation: Guaranteed Safety for Obstacle Avoidance.” *International Conference on Interactive Collaborative Robotics*. Vol. 10459. Springer, Cham, 2017. 123–133. DOI: 10.1007/978-3-319-66471-2_14.

4. Vaskov, Anatoly S. Metodologicheskie osnovy upravleniya dvizheniem sudna i konfiguratsiei zony navigatsionnoy bezopasnosti. Dr. Diss. SPb, 1998.

5. Mironenko, Alexander A. Metodologiya formalizatsii navigatsionnoy obstanovki, planirovaniya marshruta i programmnykh traektoriy dvizheniya sudna. Dr. Diss. Novorossiysk, 2016.

6. Berdyshev, V. I. “Optimal Trajectory of an Observer Tracking the Motion of an Object Equipped with a Striking Device.” *Doklady Mathematics*. Vol. 104. No. 1. Pleiades Publishing, 2021. 221–224. DOI: 10.1134/S1064562421040037.

7. Yuyukin, Igor V. “Correlation-extreme navigation through geophysical fields based on the use of spline technology.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.4 (2021): 505–517. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-4-505-517.

8. Minligareev, Vladimir T., Tatyana V. Sazonova, David A. Arutyunyan, Vadim V. Tregubov, and Yelena N. Khotenko. “Geophysical Support of Advanced Autonomous Magnetometric Navigation Systems.” *Gyroscopy and Navigation* 11.4 (2020): 350–356. DOI: 10.1134/S2075108720040082.

9. Dynaevskaya, Kristina V., Lev V. Kiselev, and Victor B. Kostousov. “Study of a Method for Calculating the Current Accuracy in Map-Aided Navigation Problem.” *Gyroscopy and Navigation* 12.1 (2021): 50–60. DOI: 10.1134/S2075108721010041.

10. Yuyukin, Igor V. “Navigational use of e-Loran in modification with spline functions method.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.4 (2020): 703–715. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-4-703-715.

11. Canciani, Aaron, and John Raquet. “Absolute Positioning Using the Earth’s Magnetic Anomaly Field.” *NAVIGATION, Journal of the Institute of Navigation* 63.2 (2016): 111–126. DOI: 10.1002/navi.138.

12. Canciani, Aaron, and John Raquet. “Airborne Magnetic Anomaly Navigation.” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System* 53.1 (2017): 67–80. DOI: 10.1109/TAES.2017. 2649238.

13. Lavrenov, Roman O. Matematicheskoe i programmnoe obespechenie resheniy zadachi mnogokreterialnogo poiska puti mobil’nogo obekta. PhD Diss. Kazan, 2020.

14. Liu, V. Postroenie traektorii i modelirovanie dvizheniya letatel’nogo apparata v srede s prepyatstviyami. Abstract of PhD Diss. M., 2018.

15. Phan-Huu, Thanh, Vo Hoang Nguyen, and Ulrich Konigorski. “A Time-optimal Trajectory Generation Approach with Non-uniform B-splines.” *International Journal of Control, Automation and Systems* 19.12 (2021): 3947–3955. DOI: 10.1007/s12555-020-0497-3.

16. Lavrenov, Roman. "Smart Spline-Based Robot Navigation on Several Homotopics: Guaranteed Avoidance of Potential Function Local Minima." *Proceedings of International Conference on Artificial Life and Robotics (ICAROB)*. Vol. 23. ALife Robotics Corporation Ltd, 2018. 407–410. DOI: 10.5954/ICAROB.2018.OS7–7.
17. Yuyukin, Igor V. "Application of the spline-functions method in computer visualization of underwater relief." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.1 (2021): 64–79. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-64-79.
18. Yuyukin, Igor V. "Interpolation of navigational function by lagrange type spline." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.1 (2020): 57–70. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-1-57-70.
19. Stepanov, O.A., and A. S. Nosov. "Algorithm for Planning an Informative Route for Map-Aided Navigation." *2021 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS)*. IEEE, 2021. DOI: 10.23919/ICINS43216.2021.9470825.
20. Liang, Xueyao, Chunhu Liu, and Zheng Zeng. "Multi-Domain Informative Coverage Path Planning for A Hybrid Aerial Underwater Vehicle in Dynamic Environments." *Machines* 9.11 (2021): 278. DOI: 10.3390/machines9110278.
21. Titov, Alexey V., Lama Barakat, and Anas Khaizaran. "Status and perspectives of E-Navigation technology implementation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.4 (2019): 621–630. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-621-630.
22. Rivkin, Boris S. "e-Navigation: Five Years Later." *Gyroskopy and Navigation* 11.2 (2020): 176–187. DOI: 10.1134/S2075108720020066.
23. Liu, Xinyue, Xingce Wang, Zhangke Wu, Dan Zhang, and Xiangyuan Liu. "Extending Ball B-spline by B-spline." *Computer Aided Geometric Design* 82 (2020): 101926. DOI: 10.1016/j.cagd.2020.101926.
24. Yuyukin, Igor V. "Spline interpolation of navigational isolines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.6 (2019): 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
25. Kumar, Rakesh, Ashok Choudhary, and Sambandan Baskar. "Modified cubic B-spline qasi-interpolation numerical scheme for hyperbolic conservation laws." *Applicable Analysis* 99.1 (2020): 158–179. DOI: 10.1080/00036811.2018.1489961.
26. Zhang, Baoxing, Hongchan Zheng, and Lulu Pan. "A Generalized Cubic Exponential B-Spline Scheme with Shape Control." *Mathematical Problems in Engineering* 2019 (2019): 3057134. DOI: 10.1155/2019/3057134.
27. Chen, Peng, and Xin Li. "Explicit Gaussian Quadrature Rules for C^1 Cubic Splines with Non-uniform Knot Sequences." *Communications in Mathematics and Statistics* 9.3 (2021): 331–345. DOI: 10.1007/s40304-020-00220-9.
28. Subbotin, Yurii N., Sergey I. Novikov, and Valerii T. Shevaldin. "Extremal function interpolation and splines." *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 24.3 (2018): 200–225. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225.
29. Yuyukin, Igor V. "Cubic spline synthesis of a distorted isoline in the aspect of using differential mode of satellite navigation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.3 (2021): 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358.
30. Stepanov, Oleg A., Alexey S. Nosov, and Anton B. Toropov. "Navigation informativity of geophysical fields in map-aided navigation." *2017 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS)*. IEEE, 2017. DOI: 10.1109/InertialSensors.2017.8171509.
31. Yuyukin, Igor V. "Spline synthesis of the charted reference of the field informativity in mission correlation-extreme navigation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 14.1 (2022): 25–39. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-1-25-39.
32. Stepanov, Oleg A., and Alexey S. Nosov. "A Map-Aided Navigation Algorithm without Preprocessing of Field Measurements." *Gyroskopy and Navigation* 11.2 (2020): 162–175. DOI: 10.1134/S207510872002008X.
33. Melnik, Victor G. *Metody obrabotki traektornykh izmereniy v sistemah prognozirovaniya i kontrolya dvizheniya sudna*. PhD Diss. Novorossiysk, 2016.
34. Yuyukin, Igor V. "Spline alternative to the multiplicity of using reference ellipsoids in navigation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.6 (2021): 804–818. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-6-804-818.
35. Yuyukin, Igor V. "Geoid approximation by methods of spline functions." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.2 (2020): 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.

36. Hu, Gang, Junli Wu, and Xiaofeng Wang. “Constructed local controlled developable H-Bezier surfaces by interpolating characteristic curves.” *Computational and Applied Mathematics* 40.6 (2021). DOI: 10.1007/s40314-021-01587-3.

37. Yuyukin, Igor V. “Optimization of navigational isosurface simulation by the methods of basic finite splines.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.2 (2019): 266–274. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-2-266-274.

38. Yuyukin, Igor V. “Modification of the least squares method for spline approximation of navigational isosurface.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.4 (2019): 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.

39. Yuyukin, Igor V. “Search for errors in the base of navigation data by the method of spline isosurface visualization.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.3 (2020): 481–491. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-3-481-491.

40. Volkovitskii, Andrey K., Evgeniy V. Karshakov, Maksim Yu. Tkhorenko, and Boris V. Pavlov. “Application of Magnetic Gradiometers to Control Magnetic Field of Moving Object.” *Automation and Remote Control* 81.2 (2020): 333–339. DOI: 10.1134/S0005117920020113.

41. Guzevich, Svyatoslav N. “Gradient is the main parameter navigation measurements.” *Measurement Techniques* 3 (2019): 46–55. DOI: 10.32446/0132-4713.2019-3-46-55.

42. Karshakov, Evgeniy V. *Struktura i algoritmy obrabotki izmereniy v aeromagnitnykh i aeroelectromagnitnykh sistemah*. Dr. Diss. M., 2018.

43. Yuyukin, I.V. “Configuring the fan of spline gradients when approximating the navigational isoline with a linear piecewise functional.” *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 2032. No. 1. IOP Publishing, 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/2032/1/012054.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ююкин Игорь Викторович —
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: enigma_777@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yuyukin, Igor V. —
PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: enigma_777@mail.ru, kaf_nav@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 11 января 2022 г.
Received: January 11, 2022.